

Probabilité

Tarek ZARI

Statistique et Mathématiques

8 février 2018

Partie 1 : Théorie des ensembles

Un ensemble est défini soit par une liste de ses éléments, soit par une règle qui définit les éléments de l'ensemble.

Exemple

$A = \{1, 2, 3\}$ signifie que l'ensemble A contient les éléments 1, 2 et 3.

$B = \{x : x \text{ est un entier naturel impair}\}$ signifie que l'ensemble B contient tous les nombres entiers naturels impairs, à savoir 1, 3, ..., 15, 17, etc.

Définition (Inclusion)

On dit que A est **inclus** dans B , et on note $A \subset B$, si tout élément de A appartient à B .

$$A \subset B \iff \forall x \in A \text{ on a } x \in B$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, alors $A \subset B$.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 5, 8\}$, alors E n'est pas inclu dans F (noté $E \not\subset F$).

Définition (Sous partie)

Soit Ω un ensemble (typiquement Ω sera inclus dans \mathbb{N} ou \mathbb{R}^d , $d \geq 1$).

A est un sous-ensemble (on dit aussi partie) de Ω , si tous les éléments de A sont des éléments de Ω . On note alors $A \subset \Omega$.

Définition (Réunion)

La **réunion** de deux ensembles A et B est le nouvel ensemble constitué soit par les éléments de A , soit par les éléments de B .

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 5, 8\}$ alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$.

On notera que l'élément 3 qui se trouve dans A et dans B n'est pas répété dans $A \cup B$.

Définition (Intersection)

*L'**intersection** de deux ensembles A et B est le nouvel ensemble formé des éléments **communs** à A et à B . Ainsi*

$$x \in A \cap B \iff x \in A \textbf{ et } x \in B$$

Exemple

- ❶ Si $A = \{1, 2, 3, 9\}$ et $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$, alors $A \cap B = \{3, 9\}$.
- ❷ Si $A = \{\text{L'ensemble des multiples de } 3\}$, et $B = \{\text{L'ensemble des multiples de } 2\}$, alors $A \cap B = \{\text{L'ensemble des multiples de } 6\}$.

Remarque Importante :

$$(A \cap B) \subset (A \cup B)$$

Définition (Complémentaire d'un ensemble)

Le complémentaire d'un ensemble A est le nouvel ensemble formé des éléments qui n'appartiennent pas à A . On note \bar{A} ou A^c .

$$x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

Exemple : Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ et $A = \{1, 2, 3, 8\}$ un sous ensemble de Ω .

Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble $\bar{A} = \{5, 6, 9\}$.

Définition (Différence entre ensembles)

La différence entre deux ensembles A et B est le nouvel ensemble formé des éléments qui appartiennent à A mais pas à B . On dit aussi " A **privé** de B ", notée $A \setminus B$.

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B \iff x \in A \cap \bar{B}$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 8, 77\}$, alors $B \setminus A = \{8, 77\}$.

Proposition (Opérations entre ensembles)

Soient A , B et C des sous-ensembles d'un ensemble Ω , alors :

- ❶ $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
- ❷ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. On note $A \cap B \cap C$.
- ❸ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. On note $A \cup B \cup C$.
- ❹ $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- ❺ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- ❻ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- ❼ $\overline{\overline{A}} = A$
- ❽ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Définition (Produit Cartésien)

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F , l'ensemble des couples ordonnés (x, y) ou $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$ et on lit " E croix F ".

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Remarques

- 1) Les éléments (x, y) sont des couples ordonnés et non des ensembles.
- 2) L'**ordre** dans lequel on écrit x et y est **important**. Le premier élément x du couple appartient au premier ensemble et le deuxième élément au deuxième ensemble.

Exemple

- ❶ Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{4, 7, 8, 17\}$, alors

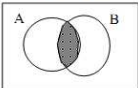
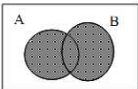
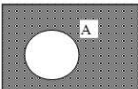
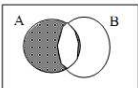
$$A \times B = \{(1, 4); (1, 7); (1, 8); (1, 17); (2, 4); (2, 7); (2, 8); (2, 17)\}$$

- ❷ Une société propose des chemises en deux couleurs " $B=Blanche$ " et " $V=Verte$ ", et trois tailles " $S=Small$ ", " $M=Medium$ " et " $L=Large$ ".

- Soit $A = \{B, V\}$ l'ensemble des couleurs et $B = \{S, M, L\}$ celui des tailles.
- Les choix possibles qu'un clients possède sont les suivants

$$A \times B = \{(B, S); (B, M); (B, L); (V, S); (V, M); (V, L)\}.$$

Rappel : opérations de la théorie des ensembles

Définition	Notation	Illustration
L' intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui se trouvent à la fois dans A et dans B.	$A \cap B$ (se lit "A inter B")	
La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui se trouvent dans A, dans B ou dans leur intersection.	$A \cup B$ (se lit "A union B")	
Le complémentaire d'un ensemble A est l'ensemble des éléments qui ne se trouvent pas dans A.	\overline{A} (se lit "A barre")	
La différence de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments contenus dans A, mais pas dans B.	$A - B$ (se lit "A diff. B")	
L' ensemble vide est l'ensemble qui ne contient aucun élément	\emptyset	

Partie II : Dénombrement

Exemple (1)

Avec les lettres du mot AMPHI, combien de mots **différents** de trois lettres peut on former ?

Solution :

A M I ou bien P H I
 M A I ou bien M H P

Nombre de possibilités

5	4	3
---	---	---

Donc ; le Nombre de possibilités $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

Exemple (2)

On considère un ensemble de 8 couleurs :

$$\mathcal{A} = \{B = \text{Blanc}; N = \text{Noir}; J = \text{Jaune}; R = \text{Rouge}; BL = \text{Bleu}; VL = \text{Violet}; \} \\ \{M = \text{Marron}; V = \text{Vert}\}$$

Combien de drapeaux de trois couleurs peut-on créer avec 8 couleurs **différentes** ?.

Solution :

$$\begin{array}{lll} B & N & R \text{ ou bien } B & J & BL \\ V & J & B \text{ ou bien } B & BL & R \end{array}$$

Nombre de possibilités

$$\boxed{8} \boxed{7} \boxed{6} \implies 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Ce résultat peut s'écrire comme suit :

$$8 \times 7 \times 6 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8!}{5!} := \frac{8!}{(8-3)!}$$

On dit que nous avons effectué un **arrangement sans répétitions**.

Définition (Factorielle)

Soit n un entier positif ou nul. On appelle **n factorielle**, noté $n!$ le produit des nombres entiers de 1 à n .

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

avec la convention $0! = 1$.

Proposition

Le **nombre des arrangements sans répétition** de p éléments pris parmi $1 \leq p \leq n$, est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!};$$

Exercice Corrigé

Enoncé : On veut imprimer une plaque de voiture comportant de gauche à droite, 4 chiffres distincts, 1 lettre et 2 chiffres dont le premier est différent de zéro (Ex :3987 A 12).

A combien s'élève le nombre de plaques de ce type ?

$$\text{Réponse : } A_{10}^4 \times 26 \times 9 \times 10 = 11793600$$

Exemple (3)

On lance successivement trois dés à 6 faces.

Combien y a-t-il d'issues possibles ?

Solution : Selon le principe de décomposition, on a

6	6	6
---	---	---

Donc ; le Nombre d'issues possibles $= 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$

Exemple (4)

Un code pin de téléphone portable est un arrangement de 4 chiffres pris dans l'ensemble

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Solution : Comme on tient compte de l'ordre et **les répétitions sont autorisées**, alors le premier chiffre dans le code pin est à choisir parmi 10 chiffres, le deuxième parmi 10, et de même pour le troisième et quatrième chiffres. Ainsi, selon le principe de décomposition, on a

10	10	10	10
----	----	----	----

Donc ; le Nombre de codes-pin possibles $= 10^4 = 10000$.

On dit que nous avons effectué un **arrangement avec répétitions**.

Définition (arrangement avec répétitions)

Un **arrangement avec répétitions** de p éléments pris parmi n , est une **liste de p éléments** dans l'ordre avec répétitions.

Proposition

Le nombre de p -listes prises parmi n objets dans l'ordre et avec répétitions est n^p .
c-à-d ; nombre d'objets à la puissance nombre des éléments de la liste.

Exemple

- ❶ Les codes de carte bancaire sont en 4 chiffres.

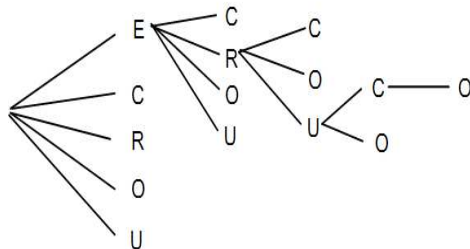
Le nombre de code bancaires possibles est 10^4 .

- ❷ Le nombre de mots possibles (non nécessairement prononçables) de cinq lettres est égal à $26^5 = 11881376$, et **non pas** 5^{26} .

Exemple (5)

Combien de "mots" différents peut-on écrire avec **toutes** les lettres du mot *ECROU* ?

Réponse : Selon le principe de décomposition (5 épreuves) :



1ère lettre : 5 possibilités

2ème lettre : 4 possibilités

3ème lettre : 3 possibilités

4ème lettre : 2 possibilités

5ème lettre : 1 possibilité

Au total : $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ possibilités

Exemple (6)

Combien de mots différents peut-on former à l'aide des 7 lettres distinctes :

A, B, C, D, E, F, G ?

(Attention : les mots formés ne doivent pas forcément avoir un sens)

Réponse : Il y a

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040 \text{ mots différents.}$$

Exemple (7)

De combien de façons différentes peut-on asseoir 5 personnes sur un banc ?

Réponse

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120 \text{ possibilités.}$$

On dit que nous avons effectué des **Permutations sans répétition**.

Définition (Permutation sans répétition)

*Une permutation est un arrangement de **n objets distincts** parmi n .*

*Le nombre de permutations de n **objets tous distincts** est $n!$. C'est exactement A_n^n .*

Exemple

- ❶ *Le nombre d'anagrammes du mot AMPHI est $5!$.*
- ❷ *le nombre de dispositions de 4 étudiants sur une rangée d'amphi est $4!$.*

Remarque : Une **anagramme** est une construction fondée sur une figure de style qui inverse ou permute les lettres d'un mot ou d'un groupe de mots pour en extraire un sens ou un mot nouveau. Par exemple :

argent - gérant - grenat - garent - ragent - Tanger

aimer - maire - Marie

chien - chine - niche .

Exemple (8)

Combien de mots différents peut-on écrire avec toutes les lettres du mot **ERRER**
(Attention : les mots formés ne doivent pas forcément avoir un sens)

Partons des permutations simples du mot : on en trouve $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$.
Mais parmi celles-ci, certaines sont indiscernables si l'on emploie le même graphisme pour toutes les lettres :

En partant du mot ERRER, on en trouve 6
en permutant les **trois r** (3!) :

ER®er
ERre®
E®Rer
E®reR
ErRe®
Er®eR

Puis, on peut multiplier par 2 ces possibilités
en permutant les **deux e** (2!) :

eR®Er
eRrE®
e®RER
e®rER
erRE®
er®ER

Nous avons donc $5! = 120$ permutations simples pour le mot ERRER ; on en compte 12 fois trop.

Ils sont donc au nombre de $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$:

RRREE	RREER	RERER	ERRRE	ERERR
RRERE	RERRE	REERR	ERRER	EERRR

Définition (Permutation avec répétition)

Si on classe dans un ordre particulier n éléments dont n_1 sont identiques de type 1, n_2 sont identiques de type 2, ..., n_k sont identiques de type k , on forme une permutation avec répétitions (de ces n éléments).

Proposition

Le nombre de permutations avec répétition n objets dont certains objets sont identiques :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times n_4! \times \dots \times n_k!}.$$

Exemple

❶ Le nombre d'anagrammes du mot *ECONOMIE* est $\frac{8!}{2! \times 2!}$

❷ Le nombre d'anagrammes du mot *STATISTIQUES* est

$$\frac{12!}{3! \times 3! \times 2!}.$$

❸ Le nombre de permutations des chiffres 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 est

$$\frac{10!}{4! \times 2! \times 3!}.$$

Exemple (9)

Combien de sous-ensembles de 3 lettres, **sans tenir compte de l'ordre**, peut-on former à l'aide des 4 lettres distinctes A,B,C,D ?

Réponse : Si l'on tient compte de l'ordre, voici le nombre de possibilités : $A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

ABC	ABD	ADC	DBC
ACB	ADB	ACD	DCB
BAC	BAD	DAC	BDC
BCA	BDA	DCA	BCD
CAB	DAB	CAD	CDB
CBA	DBA	CDA	CBD

Or, chacune des colonnes donne les mêmes lettres, qui est alors compté 6 fois (les 3! permutations du trio). Par conséquent, si l'on ne tient pas compte de l'ordre, comme c'est le cas pour les

combinaisons, il faut diviser le nombre d'arrangements simples par 3! : $C_3^4 = \frac{A_3^4}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4$

Définition (Combinaison)

*Si, parmi n éléments distincts, on choisit p éléments distincts ($p \leq n$) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une **combinaison simple** (de p éléments choisis parmi n).*

Autrement dit : une combinaison est un arrangement dans lequel l'ordre ne compte pas.

Exemple

Soit $E = \{a, b, c\}$, et $p = 2$. Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties

$$\{a, b\}, \{b, c\} \text{ et } \{c, a\}.$$

Il est essentiel à savoir que :

- Dans une partie, les éléments sont deux à deux distincts.
- Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales.

Ainsi $\{a, b\} = \{b, a\}$. (L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance)

Proposition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemple

- Quel est le nombre de comités différents composées de 5 personnes dans une association de contenant 20 personnes ?

Réponse : C_{20}^5

- Combien de sous ensembles de 8 éléments peut former avec 60 éléments ?

Réponse : C_{60}^8

- De combien de façons différentes peut-on asseoir 5 personnes sur un banc de 3 places si la place sur le banc est indifférente ?

Réponse : $C_5^3 = 10$ façons.

Les coefficients C_n^p sont encore appelés **coefficient binomiaux**. Ils peuvent être calculés seulement si $p \leq n$.

Propriétés

- ❶ Si p est strictement supérieur à n , on convient que dans ce cas $C_n^p = 0$.
- ❷ **Symétrie** : Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$C_n^{n-p} = C_n^p$$

Conséquence : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$

- ❸ **Relation de Pascal**

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

La raison pour laquelle ces coefficients sont appelés coefficients binomiaux est qu'ils apparaissent dans la formule du binôme de Newton :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Exercice (1)

- a. Avec les chiffres 2,3,5,6,7,9 combien peut-on avoir de nombres de 3 chiffres ? (avec et sans répétition)
- b. Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ? (avec et sans répétition)
- c. Parmi ceux-ci, combien sont pairs ? (avec et sans répétition)
- d. Parmi ceux-ci, combien sont impairs ? (avec et sans répétition)
- e. Parmi ceux-ci, combien sont multiples de 5 ? (avec et sans répétition)

Exercice (2)

Cette bande, partagée en 5 cases, doit être coloriée (case par case) et l'on dispose de 8 couleurs.



De combien de manières peut-on procéder si deux cases adjacentes (côte à côte) doivent être de couleurs différentes ?

Exercice (3)

1) Combien de " mots"différents peut-on former avec les lettres des mots suivants :

(Attention, les mots formés ne doivent pas forcément avoir un sens)

a) groupe b) Homme c) probabilités d) bourse e) malade f) parallèles

2) Combien de numéros de plaques différents peut-on former avec les numéros de la plaque CH 10902100.

Exercice (4)

① Combien de comités de 3 personnes peut-on former avec 8 personnes ?

② Combien de comités de 3 hommes et 2 femmes peut-on former avec 7 hommes et 5 femmes

③ Une classe compte 24 élèves. De combien de façons peut-on former :

a) 3 groupes de 8 élèves ?

b) 8 groupes de 3 élèves ?

Partie III : Calcul de probabilités

Notion d'expérience aléatoire

Expérience : On lance un dé cubique à 6 faces.

Question : Peut-on prévoir le numéro parû sur la face supérieure du dé après l'immobilisation ?

Réponse : **Non**.

On dit que l'expérience qui consiste à lancer un dé est une **EXPERIENCE ALEATOIRE**.

Définition : Expérience aléatoire

On appellera **expérience aléatoire** toute action, ou processus, dont on ne peut prédire (ne peut pas prévoir) avec certitude le résultat.

Exemple

- *Lancer d'une pièce de monnaie ou bien le jet d'un ou plusieurs dés ;*
- *Tirer une carte parmi les 52 cartes d'un jeux ;*
- *Durée d'attente dans un supermarché ;*
- *Nombre de pièces défectueuses dans un lot ;*
- *On ne peut pas connaître le numéro du cheval gagnant dans une course de chevaux ?.*

Définition : L'univers

L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** ou ensemble fondamental, ses éléments sont les possibles. Noté souvent Ω .

Exemple

- On lance une pièce de monnaie, les résultats possibles sont P, F , ainsi $\Omega = \{P, F\}$.
- On lance un dé, les résultats possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$, ainsi $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Dans un lot de 1500 pièces, le nombre de pièces défectueuses peut être $0; \dots; 1500$, ainsi $\Omega = \{0, 1, \dots, 1500\}$.

Définition : Événement

Un **événement** est une éventualité susceptible d'être réalisée lors de l'épreuve, sa réalisation dépendant du hasard.

Exemple (1)

L'Expérience aléatoire : *Lancer un dé.*

L'Événement : $\mathcal{A} = \{x ; x \text{ est pair}\}.$

Cet événement peut être réalisé ou non suivant la valeur que prendra "x" à l'issue de l'épreuve de l'expérience aléatoire.

L'évènement \mathcal{A} est réalisé si $x = 2 ; x = 4$ ou $x = 6$.

L'évènement \mathcal{A} n'est pas réalisé si $x = 1$ ou $x = 3$ ou $x = 5$.

Exemple (2)

L'Expérience aléatoire : *Lancer une pièce de monnaie.*

L'Événement : $\mathcal{A} = \{Pile\}.$

L'Événement : $\mathcal{B} = \{Face\}.$

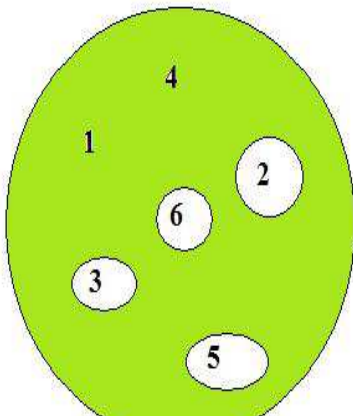
L'Expérience aléatoire : Lancer un dé numéroté de 1 à 6.

L'Évènement : $\mathcal{A} = \{\text{le nombre est } 6\} = \{6\}$.

Vocabulaire : On dit que l'évènement \mathcal{A} est un **évènement élémentaire**.

Définition : Évènement élémentaires

Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à un seul élément de Ω .



Définition : Événement réalisé

Un événement \mathcal{A} est dit **réalisé** si le résultat de l'expérience appartient à \mathcal{A} .

Exemple : On lance un dé cubique.

L'évènement $A = \{1, 2, 6\}$ est réalisé si le dé affiche : 1, 2 ou 6.

Définition : Événement impossible

Si un événement n'est pas réalisable, on dit que c'est un événement **impossible**.

On lui associe l'ensemble vide noté \emptyset .

Exemple : On lance un dé cubique, et on considère l'évènement le numéro sorti est un 7.

Cet événement peut-il être réalisé ? \Rightarrow C'est un événement impossible.

Définition : Événement certain

Un événement **certain** est un événement toujours réalisé quel que soit le résultat obtenu.

On lui associe l'ensemble fondamental Ω .

Suite à un jet de dé, considérons les événements suivant :

\mathcal{A} : le numéro est pair $\Rightarrow \mathcal{A} = \{2, 4, 6\}$

\mathcal{B} : le numéro est impair $\Rightarrow \mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$.

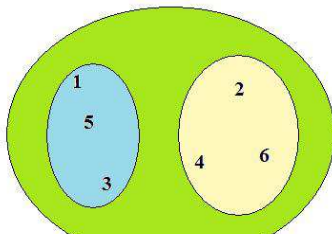
Question : Ces événements peuvent-ils se réaliser simultanément ?

Remarquons que : $\mathcal{A} \subset \Omega$; $\mathcal{B} \subset \Omega$; et que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

On dit que ces événements sont **incompatibles**.

Définition

Les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} sont **incompatibles** s'ils ne peuvent se réaliser en même temps.
D'une autre manière, lorsque $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.



On peut composer les évènements associés à une expérience aléatoire en utilisant les connexions logiques : **et**, **ou**, **non**.

Exemple : Considérons les évènements :

\mathcal{A} : le numéro est un multiple de 2. Alors $\mathcal{A} = \{2, 4, 6\}$

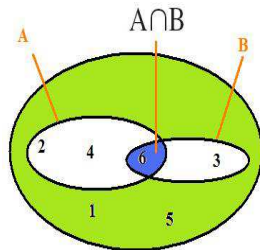
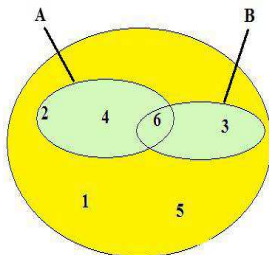
\mathcal{B} : le numéro est un multiple de 3. Alors $\mathcal{B} = \{3, 6\}$.

♣ L'évènement \mathcal{A} **ou** \mathcal{B} est l'évènement

“ le numéro est un multiple de 2 **ou** un multiple de 3”.

Ceci correspond à l'évènement $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{2, 3, 4, 6\}$.

♣ L'évènement \mathcal{A} **et** \mathcal{B} est l'évènement “le numéro est un multiple de 2 **et** un multiple de 3”. Ceci correspond à l'évènement $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{6\}$.



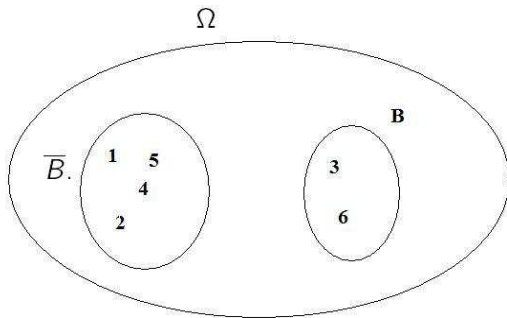
♣ Pour l'évènement $\mathcal{A} = \{\text{Pile}\}$, l'évènement contraire, non \mathcal{A} est : $\overline{\mathcal{A}} = \{\text{Face}\}$.

♣ Pour l'évènement $\mathcal{B} = \{3, 6\}$ "le numéro est un multiple de 3", on peut associer l'évènement contraire, non \mathcal{B} qui est $\overline{\mathcal{B}} =$ "le numéro n'est pas un multiple de 3."

Notation : Cet événement est noté $\overline{\mathcal{B}}$.

Dans notre exemple ; $\overline{\mathcal{B}} = \{1, 2, 5, 4\}$

$\overline{\mathcal{B}}$ est le **complémentaire** de \mathcal{B} dans Ω .



On lance un dé, et on considère les évènements suivants :

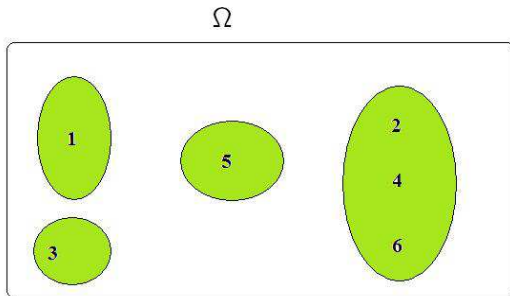
- $\mathcal{A} = \{1\}$ le numéro affiché est 1. $\mathcal{B} = \{5\}$ le numéro affiché est 5.
- $\mathcal{C} = \{3\}$ le numéro affiché est 3. $\mathcal{D} = \{2, 4, 6\}$ le numéro affiché est un multiple de 2.

On remarque que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$; $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$; $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \emptyset$;

Résultat 1 : Les évènements $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ et \mathcal{D} sont deux à deux incompatibles.

Résultat 2 : $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \Omega$

Conséquence : On dira que les évènements $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ et \mathcal{D} constituent un **système complet d'évènements**.



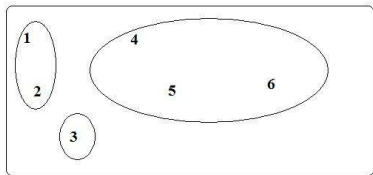
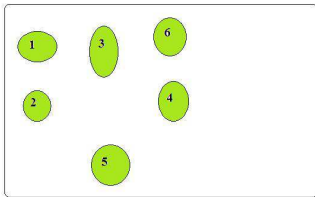
Définition : Système complet d'évènements

On dit qu'une suite d'évènements \mathcal{A}_i , $i \in I$ forme un **Système complet d'évènements** s'ils vérifient les conditions suivantes :

- ❶ $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$, $\forall i \neq j \in I \implies$ événements deux à deux incompatibles.
- ❷ $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i = \Omega$

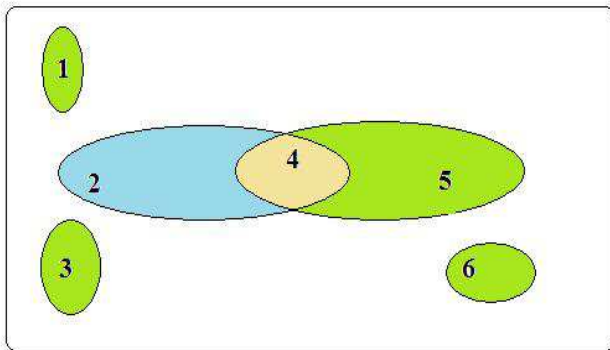
Exemple : Les événements $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$, constituent un système complet d'évènements de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

♣ Les événements $\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}$ constituent un système complet d'évènements de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Exemple :

- Pour tout événement A , les ensembles A et \bar{A} (son événement contraire), constituent un système complet d'événements.
- $\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 4, 5, 6\}$ n'est pas un système complet d'événements.
- $A = \{2, 4\}$ et $B = \{4, 5\}$ n'est pas un système complet d'événements, en effet : $A \cap B = \{4\}$;



Proposition

- $A \cap B$ est réalisé si A et B sont tous les deux réalisés.
- $A \cup B$ est réalisé si A réalisé ou B est réalisé.
- $A \cap \overline{B}$ est réalisé si A est réalisé mais pas B

Exemple

On lance un dé à six faces, et on considère les événements

- A " Avoir un nombre paire " $= \{2, 4, 6\}$
- B " Avoir un nombre impaire " $= \{1, 3, 5\}$
- C " Avoir un nombre plus petit ou égal à 3 " $= \{1, 2, 3\}$

Alors

- 1 $A \cap B = \emptyset$ car c'est impossible d'avoir à la fois un nombre paire et impaire
- 2 $A \cup B = \Omega$ événement certain.
- 3 $A \cap \overline{C} = \{4, 6\}$ alors A est réalisé mais pas C

Exercice :

Soient A ; B ; C trois événements. Exprimer à l'aide des opérations ensemblistes les événements ci-dessous :

- ① A seul se produit. **Solution :** $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
- ② A et C se produisent, mais non B. **Solution :** $A \cap C \cap \overline{B}$
- ③ Les trois événements se produisent. **Solution :** $A \cap C \cap B$
- ④ L'un au moins des événements se produit. **Solution :** $A \cup B \cup C$
- ⑤ Deux événements au moins se produisent.
Solution : $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \cup (A \cap C \cap B)$
- ⑥ Un événement au plus se produit. **Solution :**
 $(A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B})$
- ⑦ Aucun des trois événements ne se produit. **Solution :** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
- ⑧ Exactement deux événements se produisent.
Solution : $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$
- ⑨ Pas plus de deux événements se produisent. **Solution :** $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Partie VI : Calcul de Probabilité

Définition : Probabilité d'un événement

Soit A un événement quelconque d'un univers fini Ω .

La probabilité de l'événement A est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Cas Particulier : équiprobabilité

Si **tous** les événements élémentaires ont la **même probabilité de réalisation**, on dit qu'on aie en situation d'équiprobabilité.

Plus précisément ; si $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est fini, on dit que \mathbb{P} est la probabilité **uniforme (équiprobable)** sur Ω si

$$\mathbb{P}(\{e_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall e_i$$

Exemple : On lance un dé équilibré, alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Exemple 1 :

- ❶ Quelle est la probabilité d'avoir un nombre paire en lançant un dé équilibré ?

Cas favorables : 3 Cas possibles : 6 $\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

- ❷ On choisit un comité de 3 personnes parmi 5 hommes et 7 femmes.

Quelle est la probabilité que les trois personnes choisies soient

« deux hommes et une femme » ?

Cas favorables : $C_5^2 \times C_7^1 = 10 \times 7 = 70$; Cas possibles : $C_3^{12} = 220$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{70}{220} \simeq 31,8\%.$$

Exemple 2 : On lance une pièce de monnaie trois fois, donner la probabilité de l'événement A : "avoir deux faces".

L'univers : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\} \Rightarrow \text{Card}(\Omega) = 2^3 = 8$

Pour calculer $\text{Card}(A)$, on fait appel à la théorie du dénombrement ; il s'agit ici de permutation avec répétition. Ainsi ;

$$\text{Card}(A) = \frac{3!}{2!} = 3 \quad \text{d'ou } \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

◇ On peut déduire également la probabilité d'avoir au moins une face :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{avoir au moins une face}) \\ &= \mathbb{P}(\text{avoir une face et deux piles}) + \mathbb{P}(\text{avoir deux face et un pile}) + \mathbb{P}(\text{avoir trois face}) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

◇ On peut déduire également la probabilité qu'on sort exactement une fois Pile :

$$\mathbb{P}(\text{on sort exactement une fois P}) = \frac{3}{8}$$

Exemple 3 : Une urne contient une boule blanche et une boule noire.

On fait deux tirages **avec remises**. Calculez la Probabilité d'avoir 2 boules noires ?

Réponse : On a $\Omega = \{(N, N); (B, B); (B, N); (N, B)\}$ d'où $\text{Card}(\Omega) = 4$.

Posons $\mathcal{A} = \{\text{Avoir 2 boules noires}\} = \{(N, N)\}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{1}{4} .$$

Exemple 4 : Une urne contient une boule rouge, une boule verte, une boule jaune et une boule blanche. On effectue 3 tirages **avec remises**. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois la boule blanche ?

Réponse : On a $\text{Card}(\Omega) = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

Posons $\mathcal{B} = \{\text{Avoir 2 fois la boule blanche exactement}\}$; ainsi,

$$\text{Card}(\mathcal{B}) = C_3^2(\text{place des 2 blanches}) \times 3(\text{l'autre couleur}) = \frac{3!}{2!} \times 3 = 9$$

Donc

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \frac{9}{64} .$$

Exemple 5 : L'épreuve orale de statistique et probabilités d'un concours est organisée en lots de 3 sujets tirés au sort parmi 80 sujets portant sur ce cours. L'étudiant doit traiter un des sujets de son choix.

- 1) Combien d'épreuves différentes peut-on organiser ?
- 2) Un candidat se présente en n'ayant révisé que 50 sujets. Quelle est la probabilité pour qu'il puisse traiter :
 - a) les 3 sujets,
 - b) deux sujets,
 - c) un sujet,
 - d) aucun sujet

Réponse :

Le nombre d'épreuves différentes qu'on peu organiser est le nombre de façons de choisir 3 sujets parmi 80, sans tenir compte de l'ordre :

$$C_{80}^3 = 82160$$

a) Posons $A = \{\text{l'étudiant tombe sur 3 sujets qu'il a révisé}\}$

Ainsi, le nombre de cas favorables est le nombre des combinaisons des 3 sujets parmi les 50 sujets révisés. Par conséquent

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_{50}^3}{C_{80}^3} = \frac{19600}{82160} = 0,24$$

Suite de l'exemple 5 :

b) Posons $B = \{\text{l'étudiant tombe sur 2 sujets qu'il a révisé}\}$

Ainsi, le nombre de cas favorables est le nombre des combinaisons des 2 sujets parmi les 50 sujets révisés, **et** d'un sujet parmi les 30 non révisés. Par conséquent

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_{50}^2 \times C_{30}^1}{C_{80}^3} = \frac{36750}{82160} = 0,45$$

c) Posons $C = \{\text{l'étudiant tombe sur 1 sujet qu'il a révisé}\}$

Ainsi, le nombre de cas favorables est le nombre des combinaisons d'un sujet parmi les 50 sujets révisés, **et** de deux sujets parmi les 30 non révisés. Par conséquent

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_{50}^1 \times C_{30}^2}{C_{80}^3} = \frac{21750}{82160} = 0,26$$

d) Posons $D = \{\text{l'étudiant tombe sur 2 sujets qu'il a révisé}\}$

Ainsi, le nombre de cas favorables est le nombre des combinaisons des 0 sujets parmi les 50 sujets révisés, **et** de 3 sujets parmi les 30 non révisés. Par conséquent

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_{30}^3}{C_{80}^3} = \frac{4060}{82160} = 0,05$$

Proposition

On appelle une mesure de probabilité, toute application :

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1],$$

possédant les propriétés suivantes :

- ❶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- ❷ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, **si A et B sont incompatibles** c-à-d ; $(A \cap B = \emptyset)$.

Ainsi à tout événement $A \subset \Omega$, on associe le nombre $\mathbb{P}(A)$, avec

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

Remarque : L'événement impossible est de probabilité nulle. En effet,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

et comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, alors

$$1 = 1 + \mathbb{P}(\emptyset),$$

par suite $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Propriétés très très importantes

Quelques propriétés très importantes de la probabilité

- ❶ Soit A un événement et \bar{A} son événement contraire, alors nous avons

$$P(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \text{ou} \quad P(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}).$$

- ❷ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. **“Ecriture générale”**

- ❸ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$.

- ❹ Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

- ❺ Soit $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_k$ des probabilités, alors

$$\sum_{i=1}^k \mathbb{P}_i = 1$$

Application 1 :

Soient A et B deux événements tels que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{7}, \quad \mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$$

Calculez $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(\overline{A \cup B})$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Solution :

- $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - 1/5 = 4/5$.
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$ par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{7} + \frac{4}{5} - \frac{1}{56}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$, alors

$$\mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B)$$

Application 2 :

Lors d'un référendum, deux questions étaient posées. 65 % des personnes ont répondu « oui » à la première question, 51 % ont répondu « oui » à la seconde question, et 46 % ont répondu « oui » aux deux questions.

- 1) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « oui » à l'une ou l'autre des questions ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « non » aux deux questions ?

Réponse : Si on note les évènements :

A l'évènement « la personne a répondu oui à la première question » ;

B l'évènement « la personne a répondu oui à la deuxième question ».

l'énoncé nous fournit : $\mathbb{P}(A) = 0,65$; $\mathbb{P}(B) = 0,51$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,46$.

1) On calcule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,65 + 0,51 - 0,46 = 0,7$.

2) On calcule $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,3$

Application 3 :

On lance un dé à 6 faces. On note \mathbb{P}_i la probabilité de sortie de la face marquée "i". Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont :

$$\mathbb{P}_1 = 0,1; \mathbb{P}_2 = 0,2; \mathbb{P}_3 = 0,3; \mathbb{P}_4 = 0,1; \text{ et } \mathbb{P}_5 = 0,15$$

- ❶ Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?
- ❷ Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Réponse :

- ❶ On sait que $\sum_{i=1}^6 \mathbb{P}_i = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 + \mathbb{P}_4 + \mathbb{P}_5 + \mathbb{P}_6 = 1$, d'où

$$\mathbb{P}_6 = 1 - \sum_{i=1}^5 \mathbb{P}_i = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 + 0,15) = 0,15$$

- ❷ L'évènement $A = \text{"Obtenir un nombre pair"} = \{2, 4, 6\}$, d'où

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_4 + \mathbb{P}_6 = 0,45$$

Application 4 : Transformer un texte

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

- 1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.
- 2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.
- 3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.
- 4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Réponse Application 4 : Cet exercice se traduit par un tableau croisé :

	Cravate (Événement C)	Pas de cravate (Événement \bar{C})	Total
Yeux Bleus (Événement B)	50	35	85
Yeux pas Bleus (Événement \bar{B})	70	95	165
Total	120	130	250

On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 250 personnes. Ainsi $\text{Card}(\Omega) = 250$. Il y a équiprobabilité des choix de personnes. Ainsi

- ❶ La probabilité que ce soit un homme portant la cravate est

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{120}{250} = \frac{12}{25}$$

- ❷ La probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate est

$$\mathbb{P}(C \cap B) = \frac{\text{Card}(C \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}$$

- ❸ La probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate est

$$\mathbb{P}(C \cup B) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C \cap B) = \frac{85 + 120 - 50}{250} = \frac{31}{50}$$

- ❹ La probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate est

$$\mathbb{P}(\overline{C} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{C \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(C \cup B) = \frac{19}{50}$$

Définition : Événements Indépendants

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Remarque Importante : Ne pas confondre indépendants et incompatibles

Exemple 1 : Dans une université, une enquête sur le tabagisme, de 1000 personnes interrogées au hasard, a donné les résultats suivants :

	Homme	Femme
Fumeurs	420	75
Non Fumeurs	280	225

On note \mathcal{A} : l'événement " En réponse à l'enquête, la personne a déclaré fumer" ;

\mathcal{B} : l'événement " En réponse à l'enquête, la personne a déclaré être du sexe féminin".

1) Les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} sont-ils indépendants ??

2) Même question pour la même enquête dans une autre université où les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

	Homme	Femme
Fumeurs	440	360
Non Fumeurs	110	90

Réponse de l' Exemple 1 :

1) D'après le premier tableau, nous avons :

$$P(\mathcal{A}) = 0,495 \quad P(\mathcal{B}) = 0,3 \quad \text{et} \quad P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0,075$$

On a $P(\mathcal{A}) \times P(\mathcal{B}) = 0,495 \times 0,3 = 0,1485$

Constat : $P(\mathcal{A}) \times P(\mathcal{B}) \neq P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$

Conclusion : Dans cette situation, les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} **ne sont pas indépendants**.

2) D'après le second tableau, nous avons :

$$P(\mathcal{A}) = 0,8 \quad P(\mathcal{B}) = 0,45 \quad \text{et} \quad P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0,36$$

On a $P(\mathcal{A}) \times P(\mathcal{B}) = 0,8 \times 0,45 = 0,36$

Constat : $P(\mathcal{A}) \times P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$

Conclusion : Dans cette situation, les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} **sont indépendants**.

Exemple 2 : On lance un dé deux fois de suite. Soit

- A l'événement : "Le premier lancer donne un nombre pair"
- B l'événement : "Le second lancer donne un nombre pair"

Question : les événements A et B sont ils indépendants ??

L'univers naturel est $= \{(i, j); 1 \leq i, j \leq 6\}$, ensemble à 36 éléments muni de l'équiprobabilité. Il est clair que $P(A)=P(B) = 18/36 = 1/2$ et que $P(A \cap B) = 9/36 = 1/4$.

Or; $P(A) \times P(B) = 1/4$, ainsi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc A et B sont indépendants.

Exemple 3 : On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. Soit

- A l'événement : "La carte tirée est un 7"
- B l'événement : "La carte tirée est un pique".

Question : les événements A et B sont ils indépendants ??

On a $P(A) = 1/8$ et $P(B) = 1/4$. $P(A \cap B)$ correspond à la probabilité de tirer le 7 de pique donc $P(A \cap B) = 1/32$.

Ainsi on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, les événements A et B sont donc indépendants.

Définition : Probabilités conditionnelles

Si P est une probabilité sur Ω et B un événement tel que $P(B) > 0$, la probabilité d'un événement A conditionnée par B est définie par

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque Importante : Indépendance

Si A est un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ alors l'indépendance de A et B s'écrit encore $P(B|A) = P(B)$ et on retrouve la notion intuitive d'indépendance, c-à-d ; le fait que A se soit réalisé ne change rien quant à la probabilité que B se réalise.

Exemple 1 : Une urne contient 10 boules blanches, 20 boules rouges et 30 boules noires.
On tire 3 boules **sans remise**.

Donner la Probabilité que les 2 premières soient rouges et la troisième noire ?

Réponse : Soient les évènements :

A : “ la première boule tirée est rouge” ; **B** : “ la deuxième boule tirée est rouge”.

$$\text{On a} \quad \mathbb{P}(\mathbf{A}) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}; \quad \mathbb{P}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \frac{19}{59}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \times \mathbb{P}(\mathbf{A}) = \frac{19}{59} \times \frac{1}{3}.$$

Considérons les évènements : **C** = **A** ∩ **B** et **D** : “ la troisième boule tirée est noire”.

$$\mathbb{P}(\mathbf{D} \cap \mathbf{C}) = \mathbb{P}(\mathbf{D}/\mathbf{C}) \times \mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{30}{58} \times \frac{19}{59 \times 3}.$$

Exemple 2 : Une urne contient 10 boules (6 blanches et 4 rouges).

On tire au hasard et successivement deux boules de cette urne. Calculer, dans le cas du tirage **sans remise**, la probabilité que les deux boules soient blanches.

Réponse :

a) Notons B_1 l'évènement : " La boule tirée dans le premier tirage est blanche ".

Notons B_2 l'évènement : " La boule tirée dans le deuxième tirage est blanche ".

Remarquons que $B_1 \cap B_2$: " les deux boules tirées soient blanches."

On a $\mathbb{P}(B_1) = \frac{6}{10} = 0,6$ et $\mathbb{P}(B_2/B_1) = \frac{5}{9}$ Ainsi,

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_2/B_1) \times \mathbb{P}(B_1) = \frac{5}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{3}.$$

Proposition

L'application $P(. / B)$ est une probabilité sur Ω .

En effet : $P(. / \Omega)$ est à valeurs dans $[0, 1]$ car $P(A \cap B) \leq P(B)$. De plus

$$P(\Omega / B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

D'autre part : Si $(A_i)_{i \in I}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints (**incompatibles**)

$$\begin{aligned} P(\cup_{i \in I} A_i / B) &= \frac{P(\cup_{i \in I} A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\cup_{i \in I} (A_i \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i \in I} P((A_i \cap B))}{P(B)} \\ &= \sum_{i \in I} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{i \in I} P(A_i / B) \end{aligned}$$

Proposition

Soient A_1, A_2, \dots, A_n un système complet d'événements (une partition) de Ω et \mathbb{P} une probabilité sur Ω . Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap A_1) + \mathbb{P}(A \cap A_2) + \dots + \mathbb{P}(A \cap A_n). \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_j).\end{aligned}$$

Exemple

Dans une urne, on a des cubes et des boules rouges et verts. On tire un des ces objets : Soit C ="L'objet tiré est un cube" et B ="L'objet tiré est une boule". Alors (C, B) est un système complet d'événements.

On note V , l'événement, l'objet tiré est vert. Pour calculer $P(V)$; il suffit de calculer la probabilité que l'objet tiré soit un **cube vert**, et ajouter la probabilité que l'objet soit une **boule verte**.

On peut éventuellement écrire :

$$P(V) = P(V \cap C) + P(V \cap B).$$

Proposition

Soient A_1, A_2, \dots, A_n un système complet d'événements de Ω (c-à-d ; $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) tel que $\mathbb{P}(A_j) \neq 0$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n (\mathbb{P}(B \cap A_i)) = \mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n).$$

Dans le cas **ou n=2**, la formule des probabilités totales se réduit à :

Considérons un univers de probabilité Ω . Soient C et D deux événements de Ω formant un **système complet d'événements** :

$$C \cup D = \Omega \quad \text{et} \quad C \cap D = \emptyset$$

Alors, la probabilité de l'événement A est telle que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap D) \\ &= \mathbb{P}(A/C) \times \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A/D) \times \mathbb{P}(D) \end{aligned}$$

Application 1 :

Un sac contient 6 jetons ; dont 5 sont numérotés 1 et le jeton restant est numéroté 2.
Soient 2 urnes :

- U_1 contenant six boules Blanches et quatre Noires
- U_2 contenant 8 B et 2 N.

L'expérience aléatoire comporte 2 étapes. On pioche au hasard dans le sac, on regarde le numéro et on pioche dans l'urne correspondante.

Calculer la probabilité que la boule soit blanche ?

Réponse :

Première étape : On a $U_1 \cup U_2 = \Omega$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, donc $\{U_1, U_2\}$ forment un système complet d'événements

Deuxième étape : Application de la formule de probabilité totale

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap U_1) + \mathbb{P}(B \cap U_2) \\ &= \mathbb{P}(B/U_1) \times \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(B/U_2) \times \mathbb{P}(U_2) \\ &= \left(\frac{6}{10} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{8}{10} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

Application 2 :

Une entreprise utilise 3 machines différentes A,B,C pour fabriquer des pièces. 40 % sont fabriquées par A, 30 % par B et 30 % par C. La machine A produit 2 % de pièces défectueuses, B 4 % et C 5 %.

- 1) On prélève une pièce au hasard.Qu'elle est la probabilité qu'elle soit défectueuse. ?
- 2) On prend une pièce. Elle est défectueuse. Qu'elle est la probabilité qu'elle vienne de A.
- 3) On prélève une pièce. Elle est saine. Qu'elle est la probabilité qu'elle vienne de C.

Réponse :

1) Soient les évènements suivants :

- A : " être fabriqué par A ; "
- B : "être fabriqué par B"
- C : " être fabriqué par C ; "
- D : " pièce défectueuse"

On sait que : $\mathbb{P}(A) = 0,4$; $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(C) = 0,3$.

D'autre part ; $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ et $A \cup B \cup C = \Omega$.

Donc, les évènements A, B et C forment un système complet d'évènements.

Suite Réponse Appl 2 :

1) En appliquant la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned}P(D) &= P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C) \\&= 0,02 \times 0,4 + 0,04 \times 0,3 + 0,05 \times 0,3 = 0,035\end{aligned}$$

2) On sait que

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A) \times P(A)}{P(D)} = \frac{0,02 \times 0,4}{0,035} \simeq 0,229$$

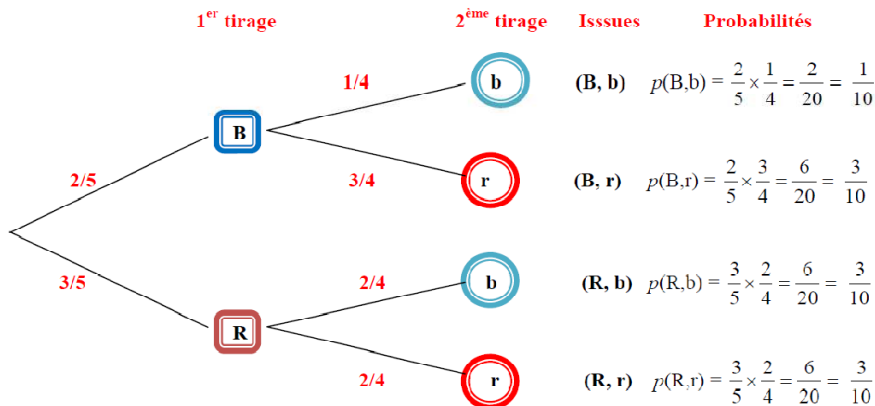
3) D'abord, l'évènement \bar{D} : "pièce saine"

On sait que

$$P(C/\bar{D}) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}/C) \times P(C)}{P(\bar{D})} = \frac{0,95 \times 0,3}{1 - P(D)} \simeq 0,37$$

Le lien avec l'arbre des probabilités et Probabilités totales :

Situation : On considère un sac contenant 2 boules bleu et 3 boules rouges. Faisant 2 tirages sans remise. Alors



Application 3 :

On considère les événements A , B et C , tel que

- $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$.
- $\mathbb{P}(A) = 0,2$, et $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(C) = 0,5$.

Soit D un événement tel que $\mathbb{P}(D/A) = 0,3$, $\mathbb{P}(D/B) = 0,2$, $\mathbb{P}(D/C) = 0,4$.

Question : Quelle est la probabilité de réalisation de D ?

Solution :

Etape 1 : Comme A , B et C sont deux à deux disjoints, et

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1,$$

alors les événements A , B et C constituent un système complet d'événements.

Etape 2 : En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D/A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D/B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D/C) \times \mathbb{P}(C). \\ &= (0,3 \times 0,2) + (0,2 \times 0,3) + (0,4 \times 0,5) \\ &= \dots\end{aligned}$$

Application 4 :(dépistage)

Dans une population deux maladies M_1 et M_2 sont présentes respectivement chez 10% et 20%.

On suppose que le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable. On entreprend un dépistage systématique des maladies M_1 et M_2 . Pour cela, on applique un test qui réagit sur 90% des malades de M_1 , sur 70% des malades de M_2 , et sur 10% des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

- 1) On choisit au hasard un individu, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?
- 2) Sachant que pour un individu ω , le test a réagi, donner les probabilités :
 - a) pour que le test ait réagi à cause de la maladie M_1 .
 - b) pour que le test ait réagi à cause de la maladie M_2 .
 - c) pour que le test ait réagi alors que l'individu n'est infecté par qu'aucune des deux maladies M_1 et M_2 .

Réponse Appl 4 : On note les évènements :

- M_1 = être atteint par M_1 ; M_2 = être atteint par M_2
- N = être atteint par aucune des maladies R = le test réagit.

Selon le texte, on a :

- $\mathbb{P}(M_1) = 0,1$; $\mathbb{P}(M_2) = 0,2$; $\mathbb{P}(N) = 0,7$
- $\mathbb{P}(R/M_1) = 0,9$; $\mathbb{P}(R/M_2) = 0,7$ et $\mathbb{P}(R/N) = 0,1$

Suite de la correction Appl 4 :

1) On remarque que :

$$\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(M_2) + \mathbb{P}(N) = 0,1 + 0,2 + 0,7 = 1$$

En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R/M_1) \times \mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(R/M_2) \times \mathbb{P}(M_2) + \mathbb{P}(R/N) \times \mathbb{P}(N). \\ &= 0,9 \times 0,1 + 0,7 \times 0,2 + 0,1 \times 0,7 \\ &= 0,3\end{aligned}$$

2) En appliquant la définition de la distribution conditionnelle, nous déduisons

$$\begin{aligned}(a) \quad \mathbb{P}(M_1/R) &= \frac{\mathbb{P}(M_1 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R/M_1) \times \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(R)} = 0,3 \\ (b) \quad \mathbb{P}(M_2/R) &= \frac{\mathbb{P}(M_2 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R/M_2) \times \mathbb{P}(M_2)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{5}{7} \\ (c) \quad \mathbb{P}(N/R) &= \frac{\mathbb{P}(N \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R/N) \times \mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{7}{30}\end{aligned}$$

Application 5 :(production)

Trois machines mettent en bouteille le même sirop pour la toux.

La machine A fabrique 20 % de la production totale et 6 % des bouteilles produites par la machine sont impropres à la vente.

La machine B fabrique 45 % de la production totale et 3 % des bouteilles produites par la machine sont impropres à la vente.

La machine C fabrique 35 % de la production totale et 2 % des bouteilles produites par la machine sont impropres à la vente.

On prend un flacon de sirop au hasard dans la production. On note :

A : "le flacon provient de la machine A" ;

B : "le flacon provient de la machine B" ;

C : "le flacon provient de la machine C" ;

D : "le flacon est impropre à la vente".

1) D'après le texte, indiquer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D/A)$, $P(D/B)$ et $P(D/C)$.

2) Calculer $P(A \cap D)$, $P(B \cap D)$, $P(C \cap D)$, .

3) Calculer $P(D)$.

4) Que représente le réel $P(A/D)$? Le calculer.

Correction Appl 5 :

1) D'après le texte ;

- $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,45$; $P(C) = 0,35$
- $P(D/A) = 0,06$; $P(D/B) = 0,03$; $P(D/C) = 0,02$

2) En appliquant la définition de la distribon conditionnelle, nous déduisons

$$P(A \cap D) = P(D/A) \times P(A) = 0,2 \times 0,06 = 0,012$$

$$P(B \cap D) = P(D/B) \times P(B) = 0,45 \times 0,03 = 0,0135$$

$$P(C \cap D) = P(D/C) \times P(C) = 0,35 \times 0,02 = 0,007$$

3) On a

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= 0,012 + 0,0135 + 0,007 \\ &= 0,0262 \end{aligned}$$

4) $P(A/D)$ représente la probabilité que le flacon provienne de la machine A, sachant qu'il est impropre à la vente.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,012}{0,0262} \approx 0,458$$

Formule de Bayes

Proposition

Soient A_1, A_2, \dots, A_n un système complet d'événements de Ω tel que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors pour tout événement B , tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, nous avons

$$\mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n)}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i/B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}, \\ &= \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n)} \end{aligned}$$

où la dernière étape découle de la formule des probabilités totales.

Exemple 1 :

Soient 2 dés; l'un d'eux est pipé. Il permet d'obtenir 6 dans 50% des cas; l'autre est équilibré. On lance l'un des deux dés choisi au hasard. On obtient 6. Quelle est la probabilité qu'on ait utilisé le dé équilibré ? ?

Solution d' l' Exemple 1 :

On considère les événements

- $A = \{\text{Obtenir 6}\}$
- $B = \{\text{Le dé est équilibré}\}$
- $C = \{\text{Le dé est pipé}\}$

A partir de l'énoncé; on a :

$$P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(A/B) = \frac{1}{6}, \quad P(A/C) = \frac{1}{2}$$

D'autre part, $B \cup C = \Omega$ et $B \cap C = \emptyset$. On peut donc appliquer le théorème de Bayes :

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(A/B) \times P(B)}{P(A/B) \times P(B) + P(A/C) \times P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exemple 2 : Reprenons les données de **Exemple 1 (sur les probabilités totales)**

Un sac contient 6 jetons ; dont 5 sont numérotés 1 et le jeton restant est numéroté 2.

Soient 2 urnes :

- U_1 contenant six boules Blanches et quatre Noires
- U_2 contenant 8 B et 2 N.

L'expérience aléatoire comporte 2 étapes. On pioche au hasard dans le sac, on regarde le numéro et on pioche dans l'urne correspondante.

- 1 Calculer la probabilité que la boule soit blanche ?
- 2 Sachant que la boule est blanche proba qu'elle provienne de U_1 ?

Réponse :

1) On a $U_1 \cup U_2 = \Omega$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap U_1) + \mathbb{P}(B \cap U_2) = \mathbb{P}(B/U_1) \times \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(B/U_2) \times \mathbb{P}(U_2) \\ &= \left(\frac{6}{10} \times \frac{5}{6} \right) + \left(\frac{8}{10} \times \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1/B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap U_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B/U_1) \times \mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(B/U_1) \times \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(B/U_2) \times \mathbb{P}(U_2)} \\ &= \frac{\frac{6}{10} \times \frac{5}{6}}{\frac{7}{15}} = \frac{5}{7}\end{aligned}$$

Exemple 3 :

Une population est constituée de 10 Français et de 10 Allemands.

- 7 Français sont bruns, 3 blonds,
- 1 Allemand est brun, 9 blonds.

On rencontre un blond, probabilité qu'il soit Allemand ?

Correction : Soient les évènements :

$A = \{\text{il est blond}\}$

$B = \text{"Allemand"}$

$C = \text{"Français"}$

On connaît :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}; \quad \mathbb{P}(A/B) = \frac{9}{10}; \quad \mathbb{P}(A/C) = \frac{3}{10}$$

On demande : $\mathbb{P}(B/A)$.

Première étape (obligatoire) : S'assurer des conditions d'application du théorème :

On a $B \cup C = \Omega$ et $B \cap C = \emptyset$

Deuxième étape (appliquer formule de Bayes) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B/A) &= \frac{\mathbb{P}(A/B) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A/B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A/C) \times \mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\frac{9}{10} \times \frac{1}{2}}{\left\{ \frac{9}{10} \times \frac{1}{2} \right\} + \left\{ \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} \right\}} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Exercice 4

Le gérant d'un magasin informatique a reçu un lot de boîtes de CD-ROM. 5% des boîtes sont abimées. Le gérant estime que :

- a) 60% des boîtes abimées contiennent un CD-ROM défectueux.
- b) 98% des boîtes non abimées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte est abimée" et par D l'événement "la boîte achetée contient CD-ROM défectueux".

- ❶ Donner les probabilités de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\bar{A})$, $\mathbb{P}(D|A)$, $\mathbb{P}(D|\bar{A})$, $\mathbb{P}(\bar{D}|A)$ et $\mathbb{P}(\bar{D}|\bar{A})$.
- ❷ Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abimée.

Correction de l'Exercice 4

- (a) On a $\mathbb{P}(A) = 0,05$, ainsi $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,95$
- (b) On a $P(D/A) = 0,6$, ainsi $P(\bar{D}/A) = 1 - P(D/A) = 0,4$
- (c) On a $P(\bar{D}/\bar{A}) = 0,98$ (Si la boîte n'est pas abimée, alors elle a 98 % de chance de ne contenir aucun CD défectueux).
En conclusion : $P(D/\bar{A}) = 1 - P(\bar{D}/\bar{A}) = 0,02$

2) Ceci revient à Calculer $P(A/D)$??

$$\begin{aligned}
 P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \\
 &= \frac{P(D/A) \times P(A)}{P(D/A) \times P(A) + P(D/\bar{A}) \times P(\bar{A})} \\
 &= \frac{0,6 \times 0,05}{0,6 \times 0,05 + 0,02 \times 0,95} \\
 &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Exercice 1. Soient A, B et C trois événements de sorte que

$$P(A) = 0.5; \quad P(B) = 0.6 \text{ et } P(A \cup B) = 0,7$$

Calculer les probabilités suivantes :

$$P(\bar{A}); \quad P(\bar{B}); \quad P(A \cap B); \quad P(\bar{A} \cap B); \quad P(\bar{A} \cup B); \quad P(\bar{B}/A)$$

Exercice 2. Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie. On choisit un élève au hasard.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Français	33	9	18

1) Calculer la probabilité des événements suivants :

F = « Étudier le français » ;

A = « étudier l'anglais » ;

T = « pratiquer le tennis »

et

V = « pratiquer la voile ».

2) Les événements « étudier le français » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants

3) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

Exercice 3.

Trois marques A, B et C de biberons se partagent le marché avec des parts respectives de 43%, 34% et 23%. Chaque marque propose des modèles avec tétine simple (S) ou à trois vitesses (V) : 35% des tétines de la marque A sont simples, ainsi que 25 % de la marque B et 47 % de la marque C. Un jeune père achète au hasard un biberon. Il constate que ce biberon a une tétine simple.

Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque C ?

Exercice 4.

Une entreprise utilise trois types d'ampoules (T1), (T2) et (T3) dans la proportion de 60%, 30% et 10%. La probabilité que ces ampoules fonctionnent est respectivement 90%, 80% et 50%.

Quelle est la probabilité qu'une ampoule défectueuse provienne de (T1) ?

Exercice 5.

Dans une entreprise qui compte 400 personnes, 300 personnes sont assurées contre la maladie, 160 contre les accidents et 120 à la fois contre la maladie et les accidents. Si l'on choisit au hasard une personne dans l'entreprise, quelle probabilité en %, y a-t-il qu'elle soit assurée :

- a) contre la maladie, mais pas contre les accidents ?
- b) contre la maladie ou les accidents ?
- c) ni contre la maladie, ni contre les accidents ?

Partie V : Variables Aléatoires