Université HASSAN II de Casablanca

Probablités et Statistiques

Année Universitaire
2019-2020

************** **Polycopié du cours** **************

par

Raby GUERBAZ

Professeur Habilité à la faculté des Sciences
Juridiques, Economiques et Sociales Aïn Sebaâ

Rappelez vous toujours que :

`Même le hasard favorise les esprits bien préparés .`

Louis Pasteur

Chapitre 1

Rappel sur la théorie des ensembles

Un ensemble est défini soit par une liste de ses éléments, soit par une règle qui définit les éléments de l'ensemble.

Exemple 1. $A = \{1, 2, 3\}$ *signifie que l'ensemble* A *contient les éléments* $1, 2$ *et* 3.
$B = \{x$ *: x est un entier naturel impair*$\}$ *signifie que l'ensemble* B *contient tous les nombres entiers naturels impairs, a savoir* 1, 3,..., 15, *17, etc.*

1.1 Opérations sur les ensembles

Définition 1. *On dit que* A *est inclus dans* B, *et on écrit* $A \subset B$, *si tout élément de* A *appartient à* B.

Exemple 2. *Si* $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, *alors* $A \subset B$.

Définition 2. *La réunion de deux ensembles* A *et* B *est le nouvel ensemble consistant en la réunion des éléments de* A *et des éléments de* B. *La réunion de* A *et* B, *notée* $A \cup B$, *qui se lit* A *union* B *est définie comme suit :*

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Le terme "ou" est employé ici dans le sens de et/ou. En effet si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cup B$.

Exemple 3. *Si* $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{2, 3, 5, 8\}$ *alors* $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$. *On notera que l'élément* 3 *qui se trouve dans* A *et dans* B *n'est pas répété dans* A *et* B.

Définition 3. *L'intersection de deux ensembles A et B est le nouvel ensemble formé des éléments communs à A et B. L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est définie par :*

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Exemple 4.

1. *Si $A = \{1, 2, 3, 9\}$ et $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$, alors $A \cap B = \{3, 9\}$.*
2. *Si $A = \{$L'ensemble des multiples de 3$\}$, et $B = \{$L'ensemble des multiples de 2$\}$, alors $A \cap B =\{$L'ensemble des multiples de $6\}$.*

Définition 4. *La différence entre deux ensembles A et B est le nouvel ensemble forme des éléments qui appartiennent à B mais pas à A. La différence entre B et A, notée B-A, est définie par :*

$$B - A = \{x : \ x \ \in B \text{ et } x \notin A\}.$$

Exemple 5. *Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 8, 77\}$, alors $B - A = \{8, 77\}$.*

Définition 5. *Le complémentaire d'un ensemble A est le nouvel ensemble formé des éléments qui n'appartiennent pas à A. Le complémentaire de A, note A, est défini par : $A = \{x : \ x \in \Omega \text{ et } \ x \notin A.\}$*

Exemple : Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ et $A = \{1, 2, 3, 8\}$ un sous ensemble de Ω. Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble $\overline{A} = \{5, 6, 9\}$

Proposition 6. *Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble Ω, alors :*

1. $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *et cet ensemble est noté* $A \cap B \cap C$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *et cet ensemble est noté* $A \cup B \cup C$.
4. $A \cup \emptyset = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $\overline{\overline{A}} = A$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.2 Produit cartésien

Définition 7. *On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F, l'ensemble des couples ordonnes (x, y) ou $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$ et on lit "E croix F".*

$$E \times F = \{(x, y) : \quad x \in E \quad et \quad y \in F\}$$

Remarques 1.2.1. ***1)*** *Les éléments (x, y) sont des couples ordonnés et non des ensembles.*
2) *L'ordre dans lequel on écrit x et y est important. Le premier élément x du couple appartient au premier ensemble et le deuxième élément au deuxième ensemble.*

Exemple 6.

1. *Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{4, 7, 8, 17\}$, alors*

$$A \times B = \{(1, 4); (1, 7); (1, 8); (1, 17); (2, 4); (2, 7); (2, 8); (2, 17)\}$$

2. *Une société propose des chemises en deux couleurs "B=Blanche" et "V=Verte", et trois tailles "S=Small", "M=Medium" et "L=Large". Soit $A = \{B, V\}$ l'ensemble des couleurs et $B = \{S, M, L\}$ celui des tailles. Les choix possibles qu'un clients a sont les suivants*

$$A \times B = \{(B, S); (B, M); (B, L); (V, S); (V, M); (V, L)\}.$$

Chapitre 2

Dénombrement

2.1 Principe fondamental du dénombrement

Théorème 8. *Supposons qu'il faille réaliser deux expériences. Si la première expérience peut produire* n *résultats et si, pour chacun d'entre eux, il y a* m *résultats possibles pour la deuxième expérience, alors il existe* $m \times n$ *résultats possibles pour l'ensemble des deux expériences.*

Exemple 7. *Supposons qu'une entreprise emplois 10 vendeurs et chaque vendeurs a 15 clients. Si un vendeurs et l'un de ses clients doivent être désigné "Client et Vendeurs exemplaires", combien y a-t-il de possibilités différentes ?*

Solution : En considérant le choix du vendeur comme première expérience, et celui du client comme deuxième expérience, on conclue d'après le principe fondamental du dénombrement qu'il y a 10×15 couple (Vendeur, Client) possibles.

2.1.1 Principe fondamental généralisé

Lorsqu'il y a plus que deux expériences à réaliser (3,4,.... expériences), le principe fondamental se généralise de manière intuitive.

Théorème 9. *Supposons qu'il faille réaliser* r *expériences. Si la première expérience peut produire* n_1 *résultats, et si pour chacun d'entre eux il y a* n_2 *résultats pour la deuxième expérience, si pour chaque résultat des deux expériences il y a* n_3 *résultats possibles pour la troisième expérience, et ainsi de suite. Alors il y aura au total* $n_1 \times n_2 \times n_3 \ldots . n_r$ *résultats possibles pour l'ensemble des* r *expériences.*

Exemple 8. *Combien de plaques minéralogiques de 8 lettres peut-on produire si les 3 premiers caractères sont des chiffres et les 5 autres sont des lettres ?*

Solution : Le premier caractère peut être choisie parmi les dix chiffres $(0, 1, 2, ..., 9)$, alors nous avons 10 possibilités. La même chose pour le deuxième et le troisième caractère. De manière similaire chacun des 5 caractères restants peut être choisi parmi les 26 lettres de l'alphabet. Alors par une application du principe fondamental il y aura $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26$.

Exemple 9. *Même question que dans l'exemple précédent, si on exclue que les lettres et les chiffres se répètent.*

Solution : Le premier caractère peut être choisie parmi les dix chiffres $(0, 1, 2, ..., 9)$, cependant maintenant il ne reste que 9 possibilités pour le deuxième caractère (Vu que les chiffres doivent être différents), et 8 possibilités pour le troisième. De manière similaire pour les 5 caractères restants, le premier on le choisi parmi 26, le deuxième parmi 25 et on diminue chaque fois de 1. Alors par une application du principe fondamental il y aura $10 \times 9 \times 8 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$.

Exercice 1.

1. *Une compagnie d'assurance classifie ses assurés selon le sexe (2), l'état civil (3) et le type de risque (10). De combien de catégories différentes cette compagnie dispose-t-elle ?*
2. *On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé. Combien y at- il de résultats possibles ?*
3. *On lance un dé plusieurs fois en prenant note du résultat à chaque épreuve. Combien y a-t-il de résultats possibles si on lance le dé :*

   a) *2 fois* ***b)*** *n fois*
4. *Un questionnaire objectif comporte 10 questions. À chaque question, on peut répondre par VRAI ou FAUX. Combien y a-t-il de façons de répondre au questionnaire complet ?*
5. *Douze coureurs prennent part à une course. De combien de façons peut-on attribuer le premier, le deuxième et le troisième prix ?*
6. *Combien de séries de résultats possibles y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois de (Le résultat 3,4,1,3 est une issue possible qui indique le premier jet était un 3, le deuxième un 4.....)*

Une catégorie importante de problèmes en analyse combinatoire se ramènent au cas suivants :
On dispose de n objets distincts. Combien existe-t-il de façons différentes :

1. D'agencer (ordonner) les objets ?
   (C'est ce qu'on appel nombre de **PERMUTATION** de n objets distincts)
2. De choisir r de ces objets ?
   (Appelé nombre de **COMBINAISONS** de r objets parmi n)
3. De choisir r de ces objets et de les agencer (ordonner) ?
   (nombre d'**ARRANGEMENTS** de r objets parmi n)

Il est possible d'obtenir la solution de chacun de ces problèmes en utilisant le principe de fondamental du dénombrement.

2.2 Arrangement sans répétition

Principe : On tire sans remise et en tenant compte de l'ordre de tirage des boules.

Définition 10. *Soient $E = \{e_1, ..., e_n\}$ un ensemble à $n \geq 1$ éléments et $p \in \{1, ..., n\}$. Un arrangement sans répétition de p éléments parmi n (ou p-liste sans répétition) est un p-uplet $(e_1, ..., e_p)$ où les éléments e_i sont deux à deux distincts.*

Proposition 11. *Le nombre des arrangements sans répétition de p éléments pris parmi $1 \leq p \leq n$, est :*

$$A_n^p = n \times (n-1) \times ...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!};$$

où on utilise la convention $0! = 1$.

Exemple 10.
1. *Avec les lettres du mot AMPHI, combien de mots différents de trois lettres peut on former ?*
2. *Combien de drapeaux de trois couleurs peut-on créer avec 8 couleurs différentes.*
3. *Combien y a-t-il d'arrivées différentes pour un tiercé avec 12 partants ?*

Solution :
1) La première lettre du mot doit-être choisie parmi les 5 lettres du mot AMPHI, la deuxième lettre parmi 4 lettres et il reste 3 choix possibles pour la troisième lettre. Alors en utilisant le principe fondamental du dénombrement, on conclu qu'il y a $5 \times 4 \times 3$ mots différents. C'est exactement un arrangement de 3 lettres parmi 5.
2) Chaque arrangement de 3 couleurs nous donne un drapeau différent, alors le nombre de drapeaux qu'on peut créer est $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6$.
3) Chaque tiercé est un arrangement de trois concurrents, alors le nombre de tiercés est A_{12}^3.

2.3 Arrangements avec répétition

Un arrangement avec répétitions de p éléments pris parmi n, est une liste de p éléments dans l'ordre avec répétitions.
Exemple : Un code pin de téléphone portable est une liste de 4 chiffres pris dans l'ensemble

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Comme on tient compte de l'ordre et les répétitions sont autorisées, alors le premier chiffre dans le code pin est à choisir parmi 10 chiffres, le deuxième parmi 10, et de même pour le troisième et quatrième chiffres.
Alors le nombre de codes Pin qu'on peut construire avec les dix chiffres, est 10^4.
En général : Le nombre de p-listes prises parmi n objets dans l'ordre et avec répétitions est n^p. [Nombre d'objets à la puissance nombre des éléments de la liste]

Exemple 11. *Les codes de carte bancaire sont en 4 chiffres. Le nombre de code bancaires possibles est* 10^4.

2.4 Permutations sans répétition

Définition 12. *Une permutation est un arrangement de n objets distincts parmi n.*
Le nombre de permutations de n objets tous distincts est $n!$. C'est exactement A_n^n.

Exemple 12.
1. *Le nombre d'anagrammes du mot AMPHI est* $5!$.
2. *le nombre de dispositions de 4 étudiants sur une rangé d'amphi est* $4!$.

2.5 Permutations avec répétition

Proposition 13. *Le nombre de permutations rectilignes de n objets dont certain objets sont identiques est :*

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times n_4! \times ... \times n_k!}.$$

Exemple 13.
1. *Le nombre d'anagrammes du mot ECONOMIE est*

$$\frac{8!}{2! \times 2!}$$

2. *Le nombre d'anagrammes du mot STATISTIQUES est*

$$\frac{12!}{3! \times 3! \times 2!}.$$

3. *Le nombre de permutations des chiffres 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 est*

$$\frac{10!}{4! \times 2! \times 3!}.$$

2.6 Combinaisons sans répétition

Définition 14. *Soient $E = \{e_1, ..., e_N\}$ un ensemble à n éléments et soit $p \leq n$. Une combinaison sans répétition de p éléments de E est une partie (sous-ensemble) de E ayant p éléments.*

Exemple 14. *Soit $E = \{a, b, c\}$, et $p = 2$. Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ et $\{c, a\}$.*

Il est essentiel à savoir que :

— Dans une partie, les éléments sont deux à deux distincts.

— Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales.
Ainsi $\{a, b\} = \{b; a\}$. (L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance)

Théorème 15. *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.*
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$\mathcal{C}_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Exemple 15. — *Le nombre de comités différents de 5 personnes dans une association de 20 personnes est C_{20}^5 ?*

— *Combien de sous ensembles de 5 éléments peut former avec 20 éléments ?*

2.7 Coefficients binomiaux

Les coefficients C_n^p sont encore appelés coefficient binomiaux. Ils peuvent être calculés seulement si $p \leq n$.

Propriétés

1. Si p est strictement supérieur à n, on convient que dans ce cas $C_n^p = 0$.
2. **Symétrie :** Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$C_n^{n-p} = C_n^p$$

Conséquence : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$

3. **Relation de Pascal**

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Chapitre 3

Calcul de probabilités

3.1 Préliminaires

Définition 16. *On appellera expérience aléatoire toute action ou processus dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.*

Exemple 16.
- *Lancer d'une pièce de monnaie*
- *Jet d'un ou plusieurs dés*
- *durée d'attente dans un supermarché.*
- *Nombre de pièces défectueuses dans un lot.*

Définition 17. *L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers ou ensemble fondamental, ses éléments sont les possibles.*

Exemple 17.
- *On lance une pièce de monnaie, les résultats possibles sont* P, F*, alors on prendra* $\Omega = \{P, F\}$.
- *Si on lance un dé, alors les résultats possibles sont* $1, 2, 3, 4, 5, 6$*, donc on prendra* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Dans un lot de 1500 pièces, le nombre de pièces défectueuses peut être* $0, 1, ..., 1500$*, alors* $\Omega = \{0, 1, ..., 1500\}$.

Définition 18. *Un événement est une éventualité susceptible d'être réalisée lors de l'épreuve, sa réalisation dépendant du hasard.*

Remarque 3.1.1. *A tout événement correspond un sous-ensemble de l'univers* Ω *qui est la liste de tous les résultats possibles qui peuvent le réaliser.*

Exemple 18.
- *L'événement avoir un 5 lors du lancé d'un dé s'écrit :* $\{5\}$.
- *L'événement "avoir un nombre pair" correspond à* $\{2; 4; 6\}$
- *L'événement " avoir un nombre strictement plus petit que 5 est* $\{1, 2, 3, 4\}$.

3.1.1 Vocabulaire

Un événement A est dit réalisé si le résultat de l'expérience appartient à A.

Exemple 19. *L'événement* $A = \{1, 2, 6\}$ *est réalisé si le dé affiche : 1,2 ou 6.*

1. L'événement impossible n'est jamais réalisé quel que soit le résultat obtenu. On lui associe l'ensemble vide noté $\emptyset$.
2. L'événement certain est toujours réalisé quel que soit le résultat obtenu. On lui associe l'ensemble fondamental Ω.
3. Les événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser simultanément. Exemple : $A = \{1, 3, 5\}$, le numéro affiché est impaire et $B = \{2, 4, 6\}$ le résultat est paire ne peuvent pas se réaliser en même temps. On remarque que $A \cap B = \emptyset$.
4. L'événement contraire d'un événement A est l'événement constitué par le complémentaire de A dans E.
   Par exemple, les événements A="obtenir un chiffre pair"=$\{2, 4, 6\}$ et B="obtenir un chiffre impair"=$\{1, 3, 5\}$ sont contraires.

Définition 19. *On appelle système complet d'événements tout ensembles* $A_1, ..., A_n$ *d'événements deux à deux incompatibles, et dont la réunion fait* Ω. *Autrement dit,* $A_1, ..., A_n$ *est un système complet d'événements si, et seulement si*
— $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pour* $i \neq j$.
— $A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n = \Omega$

Exemple 20. *Soit* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *les événements* $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{4\}$ *et* $C = \{3, 6\}$ *constituent système complet d'événements. En effet,*
— $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ *et* $A \cap C = \emptyset$.
— $A \cup B \cup C = \Omega$

Exercice : Vérifiez que
— $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$,$D = \{4\}$, $E = \{5\}$ et $F = \{6\}$ constituent un système complet d'événements.
— Pour tout événement A, les ensembles A et $\overline{A}$ (son événement contraire), constituent un système complet d'événements.
— $A = \{2, 4\}$ et $B = \{4, 5\}$ n'est pas un système complet d'événements.
— $\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 4, 5, 6\}$ n'est pas un système complet d'événements.

Remarque 3.1.2. *La notion de système complet d'événements rejoint celle de la segmentation. Par exemple : les groupes A, B et C de la licence Eco-Gestion constituent un système complet d'événements.*

3.2 Probabilités

On propose dans ce paragraphe d'associer à chaque événement A, lié à une expérience aléatoire, un nombre compris entre 0 et 1, que l'on appellera la probabilité de l'événement A et qui donne une mesure de la possibilité de réalisation de l'événement A.

3.2.1 Cas d'équiprobabilité

On dit qu'on aie en situation d'équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de réalisation. Plus précisément

Définition 20. *Si $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est fini et si pour tout e_i, $P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$ alors on dit que P est la probabilité uniforme sur Ω et que tous les événements élémentaires sont équiprobables.*

Exemple : On lance un dé équilibré, alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$$P(\{1\} = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Proposition 21. *Soit Ω fini et P la probabilité uniforme sur Ω, alors pour tout événement A on a,*

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

Autrement dit : Sous la probabilité uniforme, la probabilité d'un événement correspond au nombre de cas favorables (i.e. le cardinal de l'événement) divisé par le nombre de cas possibles (i.e. le cardinal de Ω).

Exemples : 1) On lance un dé équilibré, la probabilité d'avoir un nombre paire est :

$$P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2) On lance une pièce de monnaie trois fois, l'ensemble des possibilités est :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

a) Soit A l'événement, "avoir deux faces".

$$Card(A) = \frac{\text{Nombre total de lettres factoriel}}{\text{Nombre de lettres qui se répètent factoriel}} = \frac{3!}{2!},$$

C'est le nombre de permutations avec répétitions de FFP.
D'autre part, il suffit d'utiliser le principe fondamentale du dénombrement (règle du produit) $Card(\Omega) = 8$. En effet, nous avons des mots à trois lettres, ou chaque lettre est choisie parmi deux : P et F, alors le nombre de mots est $2 \times 2 \times 2$.) En conséquence

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

b) De la même manière, on peut calculer la probabilité d'avoir au moins une face

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{avoir au moins une face }) \\ = & \mathbb{P}(\text{avoir une face et deux piles }) + \mathbb{P}(\text{avoir deux face et un pile}) + \mathbb{P}(\text{avoir trois face }) \\ = & \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

3.2.2 Cas général

Proposition 22. *On appelle probabilité, toute application :*

$$\mathbb{P} \ : \ \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1],$$

possédant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, *si* A *et* B *sont incompatibles* $(A \cap B)$.

Ainsi à tout événement $A \subset \Omega$, *on associe le nombre* $\mathbb{P}(A)$, *avec*

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

Remarque : L'événement impossible est de probabilité nulle. En effet,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

et comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, alors

$$1 = 1 + \mathbb{P}(\emptyset),$$

par suite $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Propriétés très importantes :

1. Soit A un événement et $\overline{A}$ son événement contraire,

$$P(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}).$$

2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.

Exemple : Soient A et B deux événements tels que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{7}, \quad \mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{5} \quad et \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$$

Calculez $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Solution :

1) $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - 1/5 = 4/5$.
2) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$ par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

3)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{7} + \frac{4}{5} - \frac{1}{56}$$

4) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, alors

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B)$$

Proposition 23. *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements (une partition) de Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Alors,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap A_1) + \mathbb{P}(A \cap A_2) + ... + \mathbb{P}(A \cap A_n). \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_j). \end{aligned}$$

Exemple 1 : Dans une urne, on a des cubes et des boules rouges et verts. On tire un des ces objets : Soit A_1="L'objet tiré est un cube" et A_2="L'objet tiré est une boule". Alors (A_1, A_2) est un système complet d'événements.
On note A, l'événement, l'objet tiré est vert. Pour calculer la probabilité que l'objet tiré est vert P(A). Il suffit de calculer la probabilité que l'objet tiré soit un **cube** vert, et ajouter la probabilité que l'objet soit une **boule** verte.
On peut éventuellement écrire :

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2).$$

Exemple 2 : La promotion de S3 est dévisée en trois groupes.
Soit A, l'événement : l'étudiant fait partie du groupe A ;
B, l'événement : l'étudiant fait partie du groupe B ;
et C, l'événement : l'étudiant fait partie du groupe C ;
Les événements A, B et C ; constituent un système complet d'événements [Car ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω (le S3 dans notre cas)]

3.3 Probabilités conditionnelles

Parmi les 100 employés d'une entreprise
— Il y a 60 hommes, on note H, l'événement " être homme"

— 50 diplomés, on note D, l'événement " être diplômé"

— 40 hommes diplômés, on note $H \cap D$, l'événement " être homme et diplômé"

On se pose sur la population donnée une question du type " Parmi les employés hommes, quel est le pourcentage des diplômés ?"

Nous avons 60 hommes, est le nombre d'hommes diplômés est 40, alors le pourcentage de diplômés parmi les hommes est

$$\frac{40}{60} = \frac{Card(H \cap D)}{Card(H)} = \frac{\frac{Card(H \cap D)}{100}}{\frac{Card(H)}{100}} = \frac{\frac{Card(H \cap D)}{Card(\Omega)}}{\frac{Card(H)}{Card(\Omega)}} = \frac{\mathbb{P}(H \cap D)}{\mathbb{P}(H)}$$

Définition 24. *On appelle probabilité conditionnelle de sachant B, notée $\mathbb{P}(A/B)$, la possibilité de réalisation de A sachant que B a été réalisé. Elle est donnée par la formule suivante*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

*Cette formule est dite **Première formule de Bayes***

Remarques 3.3.1.

1. *On ne peut pas conditionner par rapport à un événement impossible ($\not\mathbb{P}(A/\emptyset)$), car on ne peut pas diviser par $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A)$
3. $\mathbb{P}(\overline{A}/B) = 1 - \mathbb{P}(A/B)$.

Exercice : Pour l'exemple précédent,

1. La probabilité qu'un homme tirer au hasard soit diplômé est

$$\mathbb{P}(D/H) = \frac{\mathbb{P}(H \cap D)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$$

2. La probabilité qu'un diplômé tirer au hasard soit homme

$$\mathbb{P}(H/D) = \frac{\mathbb{P}(H \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{4}{5}$$

3. La probabilité qu'un diplômé tirer au hasard soit femme,

$$\mathbb{P}(\overline{H}/D) = 1 - \mathbb{P}(H/D) = 1/5$$

3.3.1 Formule des probabilités totales

Proposition 25. *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements de Ω tel que $\mathbb{P}(A_j) \neq 0$, pout tous $k \in \{1, ..., n\}$. Alors pour tout événement B,*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration : Comme $A_1, A_2, ..., A_n$ est un système complet d'événements de Ω, alors par la proposition ..

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + ... + \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Utilisons la formule de Bayes, $\mathbb{P}(B \cap A_j) = \mathbb{P}(B/A_j) \times \mathbb{P}(A_j)$, alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n).$$

Exemple : On considère les événements A, B et C, tel que

— $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$.

— $\mathbb{P}(A) = 0,2$, et $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(C) = 0,5$.

Soit D un événement tel que $\mathbb{P}(D/A) = 0,3$, $\mathbb{P}(D/B) = 0,2$, $\mathbb{P}(D/C) = 0,4$.

Question : Quelle est la probabilité de réalisation de D ?

Solution : **Etape 1 :** Comme A, B et C sont deux à deux disjoints, et

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1,$$

alors les événements A, B et C constituent un système complet d'événements.

Etape 2 : En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D/A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D/B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D/C) \times \mathbb{P}(C). \\ &= 0,3 \times 0,2 + 0,2 \times 0,3 + 0,4 \times 0,5 \end{aligned}$$

3.3.2 Deuxième formule de Bayes

Proposition 26. *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements de Ω tel que $\mathbb{P}(A_j) \neq 0$, pour tous $k \in \{1, ..., n\}$. Alors pour tout événement B, tel que $\mathbb{P}(B)$, nous avons*

$$\mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n)}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i/B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}, \\ &= \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n)} \end{aligned}$$

où la dernière étape découle de la formule des probabilités totales.

Exercice d'application : Un publicitaire lance une compagne pour un nouveau produit. Il passera des annonces à la télévision.

1. 30% des annonces passeront pendant des talk-shows. (B_1)
2. 50% des annonces passeront pendant des matchs de football. (B_2)
3. 20% des annonces passeront pendant des magazines d'actualité. (B_3)

Soit A l'événement : " le public cible est atteint par l'annonce" et on donne $\mathbb{P}(A/B_1) = 0,6$, c-à-d : La probabilité pour qu'une personne appartenant au public cible regarde l'annonce si l'émission concerne un talk-show est 0,6.
De même $\mathbb{P}(A/B_2) = 0,3$ et $\mathbb{P}(A/B_3) = 0,4$.

1. Les événements B_1, B_2 et B_3 constituent-ils un système complet d'événements ?
2. Supposons que l'événement A s'est réalisé (le public cible a été atteint par l'annonce), calculer la probabilité pour que ce soit par l'intermédiaire des
   a) talk-shows.
   b) matchs de football.
   c) magazines d'actualité.

Exercice : Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boîtes sont abimées. Le gérant estime que :

a) 60% des boîtes abimées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.

b) 98% des boîtes non abimées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'évenement : "la boite est abimée" et par B l'événement "la boite achetée" contient au moins une disquette défectueuse".

1. Donner les probabilités de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}(D|A)$, $\mathbb{P}(D|\overline{A})$, $P(\overline{D}|A)$ et $P(\overline{D}|\overline{A})$.
2. Le client constate qu'un des CD-ROM achète est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée.

Exercice : Un questionnaire au choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice : Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0, 1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

3.4 Indépendance

Proposition 27. *Deux événements A et B sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Exemple : On lance un dé et on considère les événements :

1. A "Le chiffre obtenu est pair". $A = \{2, 4, 6\}$, alors $\mathbb{P}(A) = 3/6$
2. B "Le chiffre obtenu est impair" $B = \{1, 3, 5\}$, alors $\mathbb{P}(B) = 3/6$
3. $C = \{2, 3, 4\}$, alors $\mathbb{P}(C) = 3/6$

Les événements A et B ne sont pas indépendants. En effet, comme $A \cap B = \{2\}$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$. Cependant

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(A \cap B)$$

Par ailleurs, les événements A et C sont indépendants. En effet, comme $A \cap C = \{2, 4\}$, alors $\mathbb{P}(A \cap C) = 2/6$. Cependant

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A \cap C)$$

Exemple : On tire au hasard une carte dans un jeux à 52 cartes. Désignons pas A l'événement " La carte tirée est une dame"et par B l'événement " La carte est pique". On a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre total des dames}}{\text{Nombre total des cartes}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Nombre total des piques}}{\text{Nombre total des cartes}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

La probabilité de l'intersection est :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{Nombre total des dames pique}}{\text{Nombre total des cartes}} = \frac{1}{52}$$

Comme $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, par suite les événements A et B sont indépendants.
Exemple : On jette deux dé équilibrés et on considère les événements,

— A " La somme donnée par les deux dés est 5"

— B " Le premier dé affiche 3"

Est ce que A et B sont indépendants ?

L'ensemble Ω des possibilités est donné dans le tableau suivant,

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ 2 & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ 3 & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ 4 & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ 5 & (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ 6 & (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

les possibilités pour lesquelles la somme est 5 sont $A = \{(1,4); (2,3); (4,1); (3,2)\}$, alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

et de la même manière les possibilités qui commencent par un 3 sont les éléments de troisième ligne du tableau $B = \{(3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6)\}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{9}.$$

Maintenant $A \cap B = \{(3,2)\}$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/36 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Proposition 28. *Soient A et B deux événements indépendants, alors*

- $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$, *(la réalisation de A n'apporte aucune information sur la réalisation de B).*
- *A et $\overline{B}$ sont indépendants.*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ (et aussi $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants)*

Démonstration :

1. Comme A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ et par la formule de Bayes $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A/B) \times \mathbb{P}(B)$. Par identification $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$.
2. Comme A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, en plus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) \\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \end{aligned}$$

   En consequence A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. La démonstration utilise les mêmes arguments que précédement.

3.4.1 Arbres pondérés :

Un arbre se construit de gauche à droite ou de haut en bas de la manière suivante :

- La racine de l'arbre est l'événement certain, l'univers, Ω ; c'est le premier noeud.
- De ce noeud partent des branches qui mènent à des évènements. Sur chaque branche se note la probabilité de l'événement auquel elle conduit. La somme des probabilités des évènements accrochés à un noeud est égale à 1.
- De chacun de ces évènements, qui sont des nouveaux noeuds, peuvent partir de nouvelles branches sur lesquelles sont notées **des probabilités conditionnelles**.

Exemple :
Le matin, Monsieur X prend son parapluie 4 fois sur 10. Sa voisine a noté que, lorsqu'il prend son parapluie, il pleut 1 fois sur 2, le temps est nuageux 3 fois sur 8, sinon il fait beau, alors que, lorsqu'il ne prend pas son parapluie, il fait beau 3 fois sur 4 et le temps est nuageux 1 fois sur 4.

Chapitre 4

Variables aléatoires discrètes :

On peut remplacer l'étude des probabilités relatives aux événements de Ω par l'étude d'un ensemble de nombres réels de la maniére suivante : à chaque épreuve Ω de l'expérience on associe un nombre réel x_k. On met ainsi en correspondance l'ensemble des résultats possibles d'une experience avec un ensemble de nombres réels, chaque nombre étant associé à une certaine probabilité, à savoir la probabilité de l'événement formé par les épreuves ayant x_k comme image.

4.1 Variables aléatoires

4.1.1 Introduction :

Exemple 1 : Lors d'un jeux du hasard une personne lance un dé équilibré, et si l'issue est $\{1, 3, 4\}$, elle gagne 1000 DH. Sinon elle ne gagne rien.
On note X le gain lié à cette expérience aléatoire. X peut prendre les valeurs $\{1000, 0\}$, selon le résultat de l'expérience.

Définition 29. *Une variable aléatoire sur un ensemble Ω est une application X qui associe à tout événement A un nombre réel x. On note par $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des valeurs prises par X.*

Dans l'exemple précédent, la variable gain X, associe à l'événement $\{1, 3, 4\}$ la valeur $X = 1000$ et à l'ensemble $\{2, 5, 6\}$ la valeure 0. L'ensemble des valeurs de X est $\mathcal{E}(X) = \{0, 1000\}$.
Exemple 2 : Si l'on considère la constitution d'une fratrie de deux enfants, l'espace fondamental est constitue des événements élémentaires suivant : $\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}$. Les valeurs possibles prises par la variable aleatoire X "nombres de fille dans la famille" sont $\mathcal{E}(X) = \{0, 1, 2\}$.

Exemple 3 : On lance un dé et on définit par S la variable aléatoires "somme des deux dés". Les résultats ainsi que les valeurs associée de S sont résumés dans le tableau ci-dessous

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$/**S=2**	$(1,2)$/**S=3**	$(1,3)$/**S=4**	$(1,4)$/**S=5**	$(1,5)$/ **S=6**	$(1,6)$/**S=7**
2	$(2,1)$/**S=3**	(2,2) / **S=4**	(2,3) / **S=5**	(2,4)/ **S=6**	(2,5)/ **S=7**	(2,6) / **S=8**
3	$(3,1)$/**S=4**	(3,2) / **S=5**	(3,3)/ **S=6**	(3,4)/ **S=7**	(3,5)/ **S=8**	(3,6)/ **S=9**
4	$(4,1)$/**S=5**	(4,2) / **S=6**	(4,3)/ **S=7**	(4,4)/ **S=8**	(4,5) / **S=9**	(4,6)/ **S=10**
5	$(5,1)$/**S=6**	(5,2)/ **S=7**	(5,3)/ **S=8**	(5,4) / **S=9**	(5,5)/ **S=10**	(5,6)/ **S=10**
6	$(6,1)$/**S=7**	(6,2)/ **S=8**	(6,3)/ **S=9**	(6,4)/ **S=10**	(6,5)/ **S=11**	(6,6) / **S=12**

A partir du tableau on remarque que l'ensemble des valeurs prises par S est

$$\mathcal{E}(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Exercice : On lance un dé équilibré est on note P la variable aléatoire qui donne le produit des deux dés. Completez le tableaux suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$/**P=1**	$(1,2)$/**P=2**	$(1,3)$/**P=3**	$(1,4)$/**S=4**	$(1,5)$/ **S=5**	$(1,6)$/**S=6**
2	$(2,1)$/**P=2**	(2,2) / **P=4**	(2,3) / **P=6**	(2,4)/ **P=6**	(2,5)/ **P=10**	(2,6) / **P=12**
3	$(3,1)$/**P=3**	(3,2) / **P=6**	(3,3)/ **P=9**	(3,4)/ **P=12**	(3,5)/ **P=15**	(3,6)/ **P=18**
4	$(4,1)$/**P=4**	(4,2) / **P=**	(4,3)/ **P=**	(4,4)/ **P=**	(4,5) / **P=**	(4,6)/ **P=**
5	$(5,1)$/**P=**	(5,2)/ **P=**	(5,3)/ **P=**	(5,4) /**P=**	(5,5)/ **P=**	(5,6)/ **P=**
6	$(6,1)$/**P=**	(6,2)/ **P=**	(6,3)/ **P=**	(6,4)/ **P=**	(6,5)/ **P=**	(6,6) / **P=**

Alors l'ensemble des valeurs du produit P est

$$\mathcal{E}(P) = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

4.1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

A chaque valeur de la variable aléatoire on peut faire correspondre la probabilité de l'événement correspondant. En effet, dans l'example 1, la probabilité que X prend 1000 est égale à celle de l'événement $\{1, 2, 4\}$; qui est 1/2. On écrit $P(X = 1000) = 1/2$.
De la même manière la probabilité que $X = 0$ est celle de $\{3, 5, 6\}$ qui est aussi 1/2 dans ce cas. On peut tracer ces résulats dans le tableau suivant,

X	0	1000
p_i	1/2	1/2

Définition 30. *La loi de probabilité d'une variable aléatoire est entierement determinée par les valeurs de la variable aléatoire et des probabilités correspandantes.*

Reprenons l'exemple 2 sur nombre de filles. Nous avons

$$P(X=0) = P(\text{ne pas avoir de filles}) = P(\{GG\}) = 1/4$$

de la même manière

$$P(X=1) = P(\text{avoir une seule fille }) = P(\{FG, GF\}) = 2/4 = 1/2.$$

et

$$P(X=2) = P(\text{avoir deux filles}) = P(\{FF\}) = 1/4$$

La loi de probabilité est donnée par

X	0	1	3
p_i	1/4	1/2	1/4

Exercice : On lance deux dés équilibrés, donnez la loi de la somme S.
Solution : On a vu précédement que la variable aléatoire somme prend les valeurs

$$\mathcal{E}(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

A partir du tableau, on remarque que, S prend la valeur 2 une seule fois sur les 36 possibilités, alors $\mathbb{P}(S=2) = 1/36$.
De la même manière, $\mathbb{P}(S=3) = 2/36$ et ainsi de suite. Alors la loi de S est donnée par

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36/36	2/36	1/36

Exercice : Détérminez de la même manière la loi du produit.

4.2 Paramètres d'une loi de probabilités

Comme pour les distributions statistiques, les lois de probabilités possèdent des paramètres de position et dispersion.

Définition 31. *L'espérance d'une variable aléatoire X est donnée par*

$$\mathbb{E}(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \sum x_i p_i.$$

Cette définition rejoint celle de la moyenne en statistique descriptive.

Exemple : Soit la variable aléatoire qui donne la somme de deux dés, alors d'après le tableau précédent de la loi de **S**, on a

$$\mathbb{E}(\mathbf{S}) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + ... + 12 \times \frac{1}{36}.$$

Propriétés 1. *L'espérance (ou moyenne) d'une variable aléatoire possède les propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{E}(a) = a$ *si* a *est une constante. Par exemple,* $\mathbb{E}(2) = 2$.
2. $\mathbb{E}(kX) = k\mathbb{E}(X)$, *ou* k *est une constante. Par exemple,* $\mathbb{E}(3X) = 3\mathbb{E}(X)$.
3. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
4. *E(X + a) = E(X) + a, où a est une constante.*

Définition 32. *La variance de la variable aléatoire X est notée Var(X) et elle définit par*

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \\ &= \sum (x_k - \mathbb{E}(X))^2 \times p_k \end{aligned}$$

Il est souvent commode d'utiliser dans le calcul de la variance la formule

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

La variance d'une variable aléatoire X peut s'interpréter comme une mesure du degré de dispersion des valeurs de la variable aléatoire X par rapport à sa valeur moyenne. Si la variance est petite alors les valeurs de la variable aléatoire X sont groupées dans un petit intervalle autour de la valeur moyenne. Si par contre, la variance est grande, les valeurs de la variable aléatoire X sont fortement dispersées dans un grand intervalle autour de la valeur moyenne.

Application : On considère la variable gain de l'exemple 1. On rappel que la loi de X est donnée par,

X	0	1000
p_i	1/2	1/2

On le gain moyen qu'on peut espéré dans ce jeux est

$$\mathbb{E}(X) = 1/2 \times 0 + 1/2 \times 1000 = 500 \quad Euros$$

Maintenant la variance de X, est de

$$Var(X) = 1/2 \times (0 - 500)^2 + 1/2 \times (1000 - 500)^2 = 500^2 = 250000.$$

La variance est grande car les deux valeurs de X sont éloignées de la moyenne. Ceci ségnifie qu'il y'a une grande prise de risque dans ce jeux. En effet, on gagne le grand lot ou rien, et ce avec la même probabilité.

Propriétés 2. *La variance d'une variable aléatoire possède les propriétés suivantes :*

1. $Var(a) = 0$ *si* a *est une constante. Par exemple,* $Var(2) = 0$.
2. $Var(kX) = k^2 Var(X)$, *ou* k *est une constante. Par exemple,* $Var(3X) = 9Var(X)$.
3. *Var(X + a) = Var(X), où a est une constante.*

4.3 Fonction de masse et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

On utilise aussi pour décrire cette même loi la notation

$$f(x_i) = p_i, \quad \textit{pour} \quad i \in \{1, 2, 3, ..., n\} \quad \textit{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} p_i = 1.$$

Définition 33. *La fonction* $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definie pour chaque* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

s'appelle la fonction de masse de la variable aléatoire X.

On peut écrire

$$f(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si} \quad x = x_1 \\ p_2 & \text{si} \quad x = x_2 \\ p_3 & \text{si} \quad x = x_3 \\ & \vdots \\ p_n & \text{si} \quad x = x_n \\ 0 & \text{si} \quad x \neq x_i, \quad i = 1, ..., n \end{cases}$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

X	1	3	5	8
p_i	0,3	0,2	0,15	0,35

Alors la fonction de masse s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 0,3 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0,2 & \text{si} \quad x = 3 \\ 0,15 & \text{si} \quad x = 5 \\ 0,35 & \text{si} \quad x = 8 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 1, 3, 5, 8 \end{cases}$$

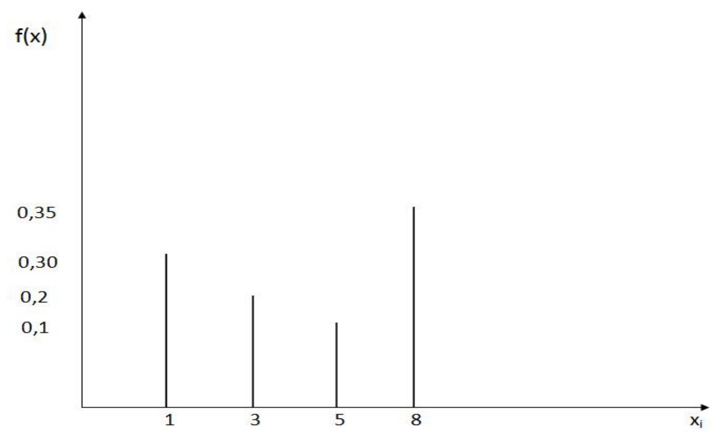

FIGURE 4.1 – Fonction de masse f

f peut être représentée de la manière suivante

Exercice 2. *On classe 5 hommes et 5 femmes selon leur résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les* $10!$ *classements possibles ont tous la même probabilité de se réaliser. On désigne le rang de la meilleure femme par* X *(par exemple* X *vaudra 2 si le meilleur résultat a été obtenu par un homme et le suivant par une femme). Donner la fonction de fréquences de X, c'est-à-dire* $P(X = i)$ *pour* $i = 1, ..., 10$.

Indication : Il faut procéder de la manière suivante. On détérmine tout d'abord l'ensemble des valeurs possibles de X, ensuite les fonctions de masses associées.

Définition 34. *Soit* X *une variable aléatoire. La fonction de répartition* F *associée à* X *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

cette notion rejoint celle des fréquences cumulées croissantes en statistique descriptive.

Exemple 1 : Avec toujours les mêmes données dans l'exemple du gain, on a :
- Pour $x \in]-\infty, 0[$ On a $F(x) = 0$,
- Pour $[0, 1000[$, On a $F(x) = 1/2$.
- Pour $x \in [1000, +\infty[$ On a $F(x) = 1/2 + 1/2 = 1$

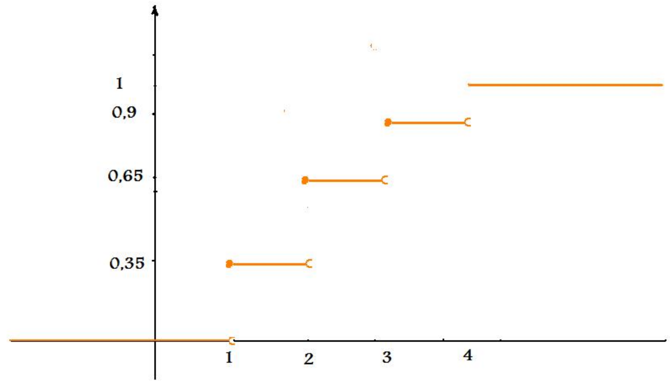

FIGURE 4.2 – Le graphique de F pour la loi de X

4.3.1 Exercices sur la fonction de répartition

Exemple 2 : Construisez la fonction de répartition pour la variable aléatoire suivante, qui donne le nombre d'enfants d'une famille marocaine :

X	1	2	3	4
p_i	0,35	0,30	0,25	0,10
p_i cumulées	0,35	0,65	0,90	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 1[\\ 0,35 & \text{si} \quad x \in [1, 2[\\ 0,65 & \text{si} \quad x \in [2, 3[\\ 0,90 & \text{si} \quad x \in [3, 4[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [4, +\infty[\end{cases}$$

On peut représenter F de la manière suivante

4.3.2 Propriètés de la fonction de répartition

En considérant la définition de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X, on constante que cette fonction jouit des propriétés suivantes :

1. $0 \leq F(x) \leq 1$. La fonction F démmare toujours de 0 et sa valeure maximale est 1.
2. F est une fonction croisante, c-à-d si $x \leq y$ alors $F(x) \leq F(y)$.

Remarque 4.3.1. *La fonction de répartition détermine uniquement la loi de probabilité d'une variable aléatoire, car la variable aléatoire prend pour valeurs les abscisses des points de saut de la fonction F avec des probabilités égales aux hauteurs des sauts.*

Exemple : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 5[\\ 0,4 & \text{si} \quad x \in [5, 6[\\ 0,52 & \text{si} \quad x \in [6, 9[\\ 0,85 & \text{si} \quad x \in [9, 10[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [10, +\infty[\end{cases}$$

On remarque que F saute exactement en $5, 6, 9, 10$, alors les valeures prisent par X sont

$$\mathcal{E}_X = \{5, 6, 9, 10\}$$

En plus, la fonction de masse de X est

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{0{,}4} & \text{si} \quad x = 5 \\ 0,52 - 0,4 = \mathbf{0{,}12} & \text{si} \quad x = 6 \\ 0,85 - 0,52 = \mathbf{0{,}33} & \text{si} \quad x = 9 \\ 1 - 0,85 = \mathbf{0{,}15} & \text{si} \quad x = 10 \end{cases}$$

En conséquence, la loi de probabilité de la variable X est donnée par

X	5	6	9	10
p_i	0,4	0,12	0,33	0,15

Remarque 4.3.2. *Une variable aléatoire peut être donnée par un tableau qui représente sa loi de probabilité, par sa fonction de masse, ou encore, par sa fonction de répartition.*

4.3.3 Calculs utilisants la fonction de répartition

La fonction de répartition permet de trouver les probabilités que la variable aléatoire prenne des valeurs dans un intervalle. On utilise dans ce sense les formules suivantes :

1. $\mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X = b)$.
2. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F(b) - F(a)$
3. $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \leq a)$
4. $\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a)$

5. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a)$

Illustration : On donne la fonction de répartition F_X du nombre de visites X d'un commercial à un secteur pendant un mois :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 2[\\ 0,2 & \text{si} \quad x \in [2,3[\\ 0,5 & \text{si} \quad x \in [3,4[\\ 0,8 & \text{si} \quad x \in [4,5[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [5,+\infty[\end{cases}$$

Alors,

1. $\mathbb{P}(2 < X \leq 4) = \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(4) - F(2) = 0,8 - 0,2 = 0,6$
2. De la même manière

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 < X < 4) &= \mathbb{P}(X < 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 3) - \mathbb{P}(X \leq 2) \\ &= F(3) - F(2) = 0,5 - 0,2 = 0,3 \end{aligned}$$

3. $\mathbb{P}(3 \leq X < 5) = \mathbb{P}(X < 5) - \mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(4) - F(2) = 0,6$
4. $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X < 2) = F(4) - 0 = 0,8$

Chapitre 5

Lois discrètes usuelles :

5.1 Loi Uniforme

C'est le cas très simple où X prend un nombre fini de valeurs, et tous les pi sont égaux.

Définition 35. *Une variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète si et seulement si*

$$\begin{cases} \textit{l'ensemble de valeurs de } X \textit{ est} & \mathcal{E}_X = \{1, ..., n\} \\ \textit{et} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} & \textit{pour tout} \quad k \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

Exemple 21. *On lance un dé cubique équilibré à six faces, les résultats possibles sont $\mathcal{E}_X = \{1, 2, ..., 6\}$. Soit X le numéro affiché par le dé. La loi de X est donnée par*

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

C'est une loi uniforme discrétes de parmètre 6.

Paramètres de la loi Uniforme :

1. $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
2. $Var(X) = \frac{n^2-6}{12}$

5.2 Loi de Bernoulli

On considère une expérience dont le résultat ne peut prendre que deux valeurs appelées, par convention, succès ou échec, par exemple : un candidat est reçu ou non à un examen, une pièce usinée est **bonne** ou **défectueuse**, une porte est **ouverte** ou **fermée**...

À une expérience de ce type, est associée une variable aléatoire X prenant la valeur 1 pour le succès et la valeur 0 pour l'échec, avec les probabilités respectives p et $(1 - p)$.

Cette variable est appelée variable de Bernoulli de paramètre p.
Exemple 1 : On jette une mièce de monnais, et on considère la variable aléatoire qui prend 1 si l'issue est Pile, et 0 sinon. Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Le tableau de la loi de X est donnée par

X	1	0
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Exemple 2 : On lance un dé cubique équilibré à six faces. Soit X la variable qui prend 1 si le dé affiche $\{2, 3\}$ et $X = 0$ si le dé affiche $\{1, 4, 5, 6\}$. Alors la loi de X est donnée par

X	1	0
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

C'est une loi de Bernoulli de paramètre 1/3.

Paramètres d'une loi de Bernoulli

$E(X) = p$ et $Var(X) = p(1 - p)$.

5.3 Loi Géométrique

Considérons une épreuve de Bernoulli dans laquelle le succès a une probabilité p. On note q la probabilité $1 - p$ de l'échec.
On répète l'épreuve de Bernoulli de façon indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès. Soit X le nombre de répétitions nécessaires à l'obtention d'un succès. L'événement X = n est la conjonction de $n - 1$ échecs suivi d'un succès. Comme les épreuves successives sont indépendantes, les probabilités se multiplient :

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette loi de probabilité est appelée loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.
La relation "X suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$ est notée $X \sim Geom^*(p)$.
Soit X le nombre de répétitions avant l'obtention d'un succès. on dit que X suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$. Sa loi de probabilité est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = n) = pq^n, n \in \mathbb{N}.$$

La relation "X suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$ est notée $X \sim Geom(p)$.

5.3.1 Propriètés

Equivalence des définitions

Soit $X \sim Geom^*(p)$. Soit $Y = X - 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X = n + 1) = p(1 - p)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $Y \sim Geom(p)$.
Réciproquement, si $Y \sim Geom(p)$, soit $X = Y + 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n - 1) = p(1 - p)^{n-1}, \quad \forall \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Il y a donc équivalence entre $X \sim Geom^*(p)$ et $X - 1 \sim Geom(p)$.

Espérance d'une loi Géomètrique

Soit X une variable aléatoire Géomètrique, alors :
Si $X \sim Geom^*(p)$, l'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.
Si $X \sim Geom(p)$, l'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1 - p}{p}$.

Variance d'une loi Géomètrique

Les relations $Var(X + 1) = Var(X - 1) = Var(X)$ font qu'il n'y a pas besoin de distinguer loi géométrique sur $\mathbb{N}$ et loi géométrique su $\mathbb{N}^*$ pour le calcul de la variance : le résultat est identique.

$$X \sim Geom(p) \;\; ou X \sim Geom^*(p) \quad Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Exemple

1. On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. X est le nombre de lancers jusqu'à obtenir 6.
   Le jet d'un dé est ici une épreuve de Bernoulli, avec deux résultats possibles :
   a) le succès : on obtient un 6. Sa probabilité est $p = \frac{1}{6}$ puisque le dé est équilibré.
   b) l'échec : on n'obtient pas un 6. Sa probabilité est $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.
   La loi de probabilité de X est donc donnée par :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

   C'est la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$.

5.4 Loi hypergéométrique

Exemple introductif : On vient de vous livrer un lot de piéces de rechange, dans le contrat il est inscrit que le lot comporte au plus 2% de piéces défécteuses. Pour vérifier la marchandise le controleur de récéption prélève au hasard un échantillon de 50 pièces dans une production totale de 10000 pièces.

Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 1 pièce défectueuse dans l'échantillon de 50 pièces (soit disant 2%) ?

On connais la proportion de pièces défécteuses dans la production entière qui est de 2%, et on aimerais bien connaitre cette proportion dans l'échantillon de taille 50.

Comme on a seulement 50 pièces dans notre échantillon, alors le nombre de pièces défécteurses parmi les 50 ne peut être que 0, 1, 2, ..., ou 50. Dans ce cas on dit qu'on aie en présence d'une variable aléatoire X de valeurs dans $\{0, 1, 2, ..., 50\}$.

Pour avoir la loi de la variable X il faut calculer les probabilités associées aux differentes valeurs de X.

En général : Dans une population de taille N, on a deux types d'éléments, N_1 éléments de type I et N_2 éléments de type II. On effectue n tirages sans remise (= prélèvement d'un seul coup de n éléments). La variable aléatoire discrète X = nombre d'éléments de type I obtenus après les n tirages suit la loi hypergéométrique notée $H(N, n, p)$ avec $p = \dfrac{N_1}{N}$, définie par

$$\begin{cases} \text{X prend des valeurs comprises entre} \quad Max(0, N_1 + n - N) \; et \; Min(n, N_1) \\ \text{et} \quad \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{C_{Np}^{k} C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n} \qquad \text{Avec} \;\; N_1 = Np \;\; \text{et} \; N_2 = N - Np \end{cases}$$

En effet, pour le cas de notre exemple, si la taille de l'échantillon n est plus grand que le nombre de pièces non défectueuses $N_2 = N - N_1$, on tire au moins $n - (N - N_1)$ pièces défectueuses. Sinon, on peut tirer 0 pièces défectueuses.

De l'autre côté, le nombre de pièces défectueuses tirées est au maximum égal à la taille n de l'échantillon lorsque n est inférieur au nombre de pièces défectueuses, et il est au maximum égal au nombre de pièces défectueuses lorsque la taille n de l'échantillon est supérieure au nombre N_1 de pièces défectueuses.

Concernant la formule de calcul de probabilité : un échantillon comportant k pièces défecteuses est constitué en prenant une partie à k éléments de l'ensemble à N_1 éléments des pièces défectueuses, et une partie à $n - k$ éléments de l'ensemble à $N - N_1$ éléments des pièces non défectueuses. Ceci peut se faire de $C_{N_1}^{k} C_{N-N_1}^{n-k}$ façons. Comme il existe C_N^n

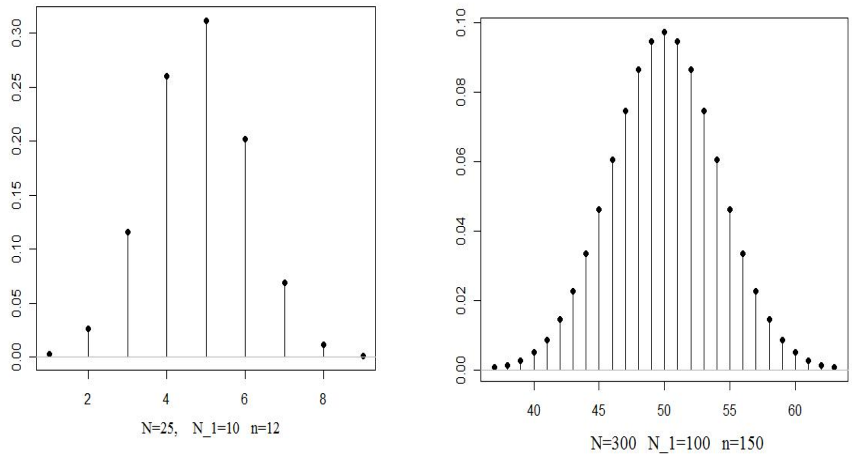

FIGURE 5.1 – Fonction de masse de la loi Hypergéométrique

échantillons possibles de n pièces parmi les N pièces de la production, la probabilité qu'il y ait exactement k pièces défectueuses dans l'échantillon de n pièces est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{N_1}^{k} C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$$

Propriétés : Si X suit une loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ alors

— $\mathbb{E}(X) = np.$

— $Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

Exemple 22.

5.4.1 Graphique de la fonction de masse f

5.5 Loi Binomiale

Décrite pour la première fois par Isaac Newton en 1676 et démontrée pour la première fois par le mathématicien suisse Jacob Bernoulli en 1713, la loi binomiale est l'une des distributions de probabilité les plus fréquemment rencontrées en statistique appliquée.

On associe au modèle de Bernoulli la variable aléatoire X qui représente le nombre d'apparitions d'un événement A quand on effectue n expériences de Bernoulli. Autrement dit, on réalise n expériences indépendantes, chacune ayant p pour probabilité de succès et $1-p$ pour probabilité d'échec. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les n résultats est dite de loi Binomiale de paramètres (n,p), notée $B(n, p)$.
La fonction de masse de X est donnée par la formule

$$f(k) = P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{pour tout} \quad k = 1, 2, ..., n$$

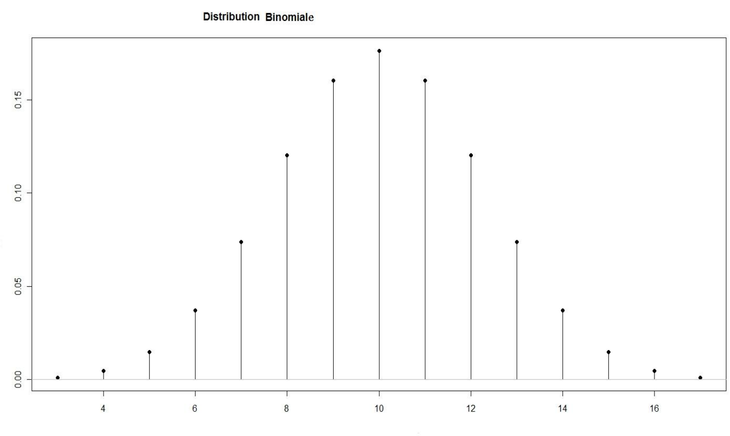

FIGURE 5.2 – Le graphique de F pour la loi de X

Exemples : 1°/ On tire au hasard 15 cartes d'un jeu de 52 cartes. La variable X qui modèlise le nombre d'as tirés suit une loi Binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = \frac{4}{52}$
2°/ On lance une pièce cinq fois. X est le nombre de piles obtenus suit une binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 1/2$, qu'on note $B(5, 1/2)$.
3°/ On lance un dé 20 fois. X est le nombre de 5 obtenus suit une $B(20, 1/6)$.

5.6 Loi de Poisson

La loi de Poisson est adaptée à l'étude d'évènements dont les chances de réalisation sont faibles : événements rares (l'occurrences d'un évènement dans un certain laps de temps ou dans une région donnée)

Exemple 23. — *Le nombre d'appels téléphoniques dans un intervalle de temps.*
— *Le nombre de naissance de naissances par année dans une petite municipalité*
— *Le nombre de client qui se présentent à une caisse dans une supérette.*

Définition 36. *La moyenne de réalisation d'un événement est λ, et X le nombre de réalisation de cet événement. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ notée $\mathcal{P}(\lambda)$, et définie par*

$$\begin{cases} \text{l'ensemble de valeurs de } X \text{ est} \quad \mathcal{E}_X = \{0, 1, ..., +\infty\} = \mathbb{N} \\ \text{et} \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{pour tout } \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

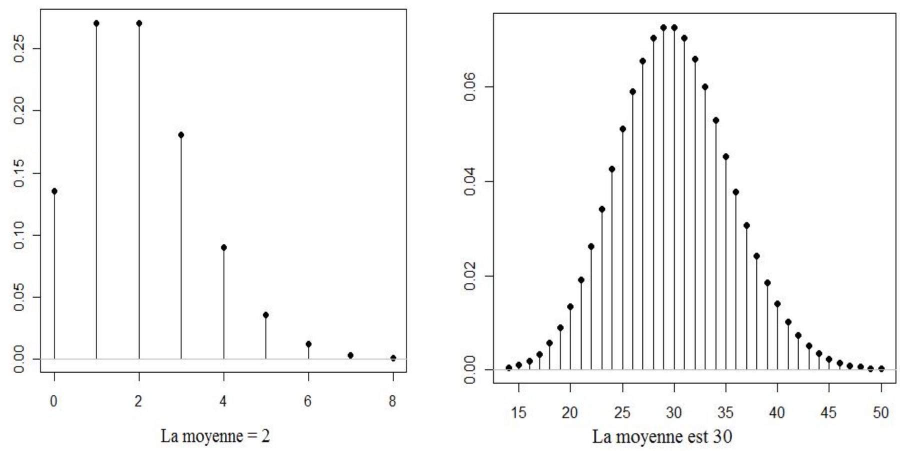

FIGURE 5.3 – Graphique de la loi de Poisson pour $\lambda = 2$ et $\lambda = 30$

Propriétés :
- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- Si X_1 suit une $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et X_2 suit une $\mathcal{P}(\lambda_2)$, X_1 et X_2 indépendante, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exemple 24. *La moyenne de vente d'un produit A dans un point de vente d'une chaine de magasins est de* 5 *articles par jour. Dans un autre point de vente la moyenne de vente est de 6 articles par jour.*
Soit X le nombre d'articles vendu par jour par l'ensemble des deux magasins. X suit une loi de Poisson de paramètre $5 + 6 = 11$.

Généralisation : Soient X_i, $i = 1, ..., n$ n variables aléatoires de lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$. Alors la variable aléatoire

$$Y = X_1 + X_2 + ..., X_n \text{ suit une loi de Poisson } \quad \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + ... + \lambda_n).$$

Exercice 2 : Construisez un exemple avec une chaine de supermarchés regroupant 12 points de vente, avec des moyennes de vente par supermarché λ_i, i=1,2,...,n.

5.7 Approximations entre les lois

5.7.1 Convergence de lois Hypergéométrique vers la Binomiale

On a expliqué que la loi Hypergéométrique est utilisée quand la taille de la population est connue. Maintenant il est naturel de se demander si la taille de la population devient grande, que devient la loi de X.

Proposition 37. *Soit* X *une variable aléatoire qui suit une loi Hypergéométrique* $H(N, n, p)$*, si* N *devient très grand, la loi de* X *peut être approchée par une loi binomiale* $B(n, p)$*. En pratique on utilise le critère* $n/N < 10\%$ *; on dit que le taux de sondage est inférieur à* 10% *(la taille de l'échantillon représente moins de* 10% *de celle de la population.*

Exemple 25. *Une loi Hypergéométrique* $H(600, 50, 0, 02)$ *peut être approchée par une loi* $B(50, 0, 02)$ *; car* $50/600 < 10\%$.

5.7.2 Convergence de la Binomiale vers la loi de Poisson

La loi de Poisson est toujours liée à l'étude des phénomènes rares. Alors dans l'étude d'une loi Binomiale B(n,p) avec le p très petit, on préfère souvent travailler avec une loi de Poisson.

Proposition 38. *Soit* X *une variable aléatoire qui suit une loi binomiale* $B(n, p)$*, si* n *est grand et* p *petit, on peut approcher la loi* $B(n, p)$ *par une loi de Poisson* $\mathcal{P}(np)$*. Dans la pratique on approche dés que* $p > 50$ *et* $p < 0, 1$*.*

Par exemple une loi $B(100; 0, 02)$ peut être remplacée par une $\mathcal{P}(2)$.
Exercice 1 : On effectue un contrôle de qualité d'un lot de pièces de la manière suivante : on extrait du lot, au hasard, une pièce à la fois, et on détermine si elle est acceptable ou non. Le nombre maximum de pièces que l'on peut examiner est fixé à 5. Si la pièce choisie à la k-ième extraction pour k = 1, ... , 4 ne rencontre pas les normes, alors le lot est rejeté et on cesse la sélection. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de pièces examinées, en supposant que la probabilité qu'une pièce extraite du lot au hasard soit acceptée est 0,9.

Chapitre 6

Lois de probabilités continues

Dans le chapitre précédent nous avons traité les variables aléatoires discrètes, c'est à dire les variables dont l'ensemble de valeurs est finit ou au plus dénombrable ($\mathbb{N}$ par exemple dans le cas de la loi géométrique). Il existe par ailleurs des variables aléatoires telle que l'ensemble des valeurs est infini non dénombrable. Par exemple, le prix d'une action en bourse ou la durée d'attente en caisse dans une grande surface etc.

Définition 39. *Une fonction f définit sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si et seulement si*

$$\begin{cases} f \textit{ prend toujours des valeurs positives },\ \ c\ \grave{a}\ d \quad f(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \\ et \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \end{cases}$$

La dernière propriété correspond au fait que la somme des fréquences est égale à 1 dans le cas discret.

Exemple 1 : On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si \ \ x \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On remarque que $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_{0}^{1} 2xdx + 0 = [x^2]_0^1 = 1$$

Alors f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$g(x) = \begin{cases} 1/x & si \ \ x \in [1,e] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On remarque que $g(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{e} g(x)dx + \int_{e}^{+\infty} g(x)dx = 0 + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}dx + 0 = [ln(x)]_1^e = 1$$

Alors g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} 2\exp(-2x) & si \;\; x \in [0, +\infty[\\ 0 & sur \;\;]-\infty, 0[\end{cases}$$

On remarque que $h(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = [-\exp(-2x)]_0^{+\infty} = 1$$

Alors h est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition 40. *Une variable aléatoire X est dite continue s'il existe une densité de probabilité f, telle que pour tout ensemble B de nombre réels*

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Tous les calculs de probabilités relatifs à X passent à travers f. Par exemple si $B = [a, b]$ alors on peut écrire

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple : On considère la variable aléatoire X continue de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} C(2x-3), & si \;\; x \in [2, 5] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Quelle est la valeur de C ? Calculez $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 4)$ et $\mathbb{P}(X > 3)$.

Etape 1 : On cherche une valeur de la constante C telle que f soit une densité. D'abord, f est positive car $x \geq 2$ alors $2x \geq 3$. Il reste à vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{+\infty} f(x)dx \\ &= 0 + \int_{2}^{5} C(2x-3)dx + 0 \\ &= [C(x^2 - 3x)]_2^5 = 10C + 2C = 12C \end{aligned}$$

Pour que l'intégral de f soit égal à 1, il faut que $C = 1/12$.
Etape 2 : Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 \le X \le 4) &= \int_1^4 f(x)dx \\ &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx \\ &= 0 + \int_2^4 \frac{1}{12}(2x-3)dx \\ &= \frac{1}{12}[(x^2-3x)]_2^4 = 1/2.\end{aligned}$$

Définition 41. *Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f. Alors*

1. *La moyenne de X est définit par $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$.*
2. *La variance de X est donnée par*

$$\begin{aligned}Var(X) &= \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[x - \mathbb{E}(X)\right]^2 f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - (\mathbb{E}(X))^2.\end{aligned}$$

3. *La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue est*

$$F(a) = \mathbb{P}(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Pour l'exemple précédent, la moyenne de X est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{2} xf(x)dx + \int_2^5 xf(x)dx + \int_5^{+\infty} xf(x)dx \\ &= 0 + \frac{1}{12}\int_2^5 x(2x-3)dx + 0 \\ &= \frac{1}{12}[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_2^5 = 275/72 + 4/72 = 279/72\end{aligned}$$

Le calcul de la variance se fait de la même manière. Il est laisser en exercice.
Pour la fonction de répartition :
Premier cas : $a < 2$: On a $f(x) = 0$ pour tous $x < a < 2$, alors

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 0 \;\text{ si }\; a < 2,$$

Deuxième cas : $2 < a < 5$, alors

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{a} f(x)dx \\ &= 0 + [\frac{1}{12}[x^2 - 3x]_2^a \\ &= \frac{a^2 - 3a + 2}{12}. \end{aligned}$$

Troisième cas : si $a > 5$

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{5} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx \\ &= 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Alors en résumé :

$$F(a) = \begin{cases} 0 & si \quad a < 2 \\ \frac{a^2-3a+2}{12} & si \quad a \in [2, 5] \\ 1 & si \quad a > 5 \end{cases}$$

Nous allons étudier en détail dans cette la suite les lois continues les plus fréquemment rencontrées dans la pratique.

6.1 Loi uniforme continue

Définition 42. *Une variable X est uniforme sur un intervalle $[a, b]$ si sa densité est constante sur $[a, b]$, et nulle ailleurs. Précisément :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & si \quad x \in [a, b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Proposition 43. *La fonction de répartition de la loi uniforme est donnée par*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & si \quad x \in [a, b] \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

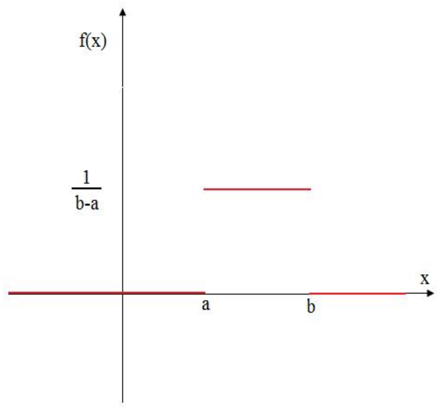

FIGURE 6.1 – Densité de la Uniforme continue

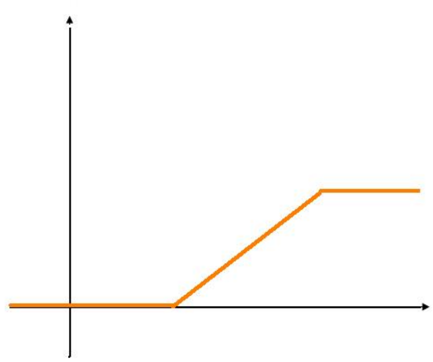

FIGURE 6.2 – La fonction de répartition d'une loi loi Uniforme sur [a,b]

Exemple : On considère que la durée d'attente d'un bus qui passe toutes les 15 minutes est une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[0,15]$.
La densité de X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}, & si \quad x \in [0,15] \\ 0 & si \ x \notin [0,15] \end{cases} \quad \text{et la fonction de répartition } F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{x}{15}, & si \quad x \in [0,15] \\ 1 & si \quad x > 15 \end{cases}$$

On peut calculer les probabilités suivantes en utilisant l'expression de la fonction de répartition, $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 9)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 19)$, $\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 18)$.

1. $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 8) = F(8) - F(2) = \frac{8}{15} - \frac{3}{15} = \frac{6}{15} = 0,33$. Ceci dit que si un Bus passe une fois toutes les 15 minutes, alors une personne qui vient d'arriver à l'arrêt a 33% de chance d'attendre entre 2 et 8 minutes.
2. De la même manière $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 9) = F(9) - F(-1) = 9/15 - 0$. Car -1 est inférieure à 0 alors F(-1)=0.
3. et $\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 18) = F(18) - F(-2) = 1 - 0 = 1$
En effet F(18)=1 comme $18 > 15$, et $F(-2) = 0$ car $-2 < 0$.

Propriétés :

1. La moyenne de la loi uniforme continue est donnée par $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$. En effet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{1}{b-a} [\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

2. La variance d'une variables aléatoire de loi uniforme est $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. En effet,

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\
&= \frac{b^2+a^2+ab}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\
&= \frac{4b^2+4a^2+4ab-3a^2-6ab-3b^2}{12} \\
&= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

6.2 Loi exponentielle

Définition 44. *On dit X suit une loi exponentielle de paramètre réel $\lambda > 0$ si sa fonction de densité est :*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une loi exponentielle est donnée par

$$F(a) = 1 - e^{-\lambda a}, \quad a \geq 0.$$

En effet

$$\begin{aligned}
F(a) &= \int_{-\infty}^a f(x)dx \\
&= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= [-e^{-\lambda x}]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}
\end{aligned}$$

On remarquera que $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ comme il se doit.
Propriétés :

1. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. La démonstration est facile (utilisez une intégration par parties)
2. $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

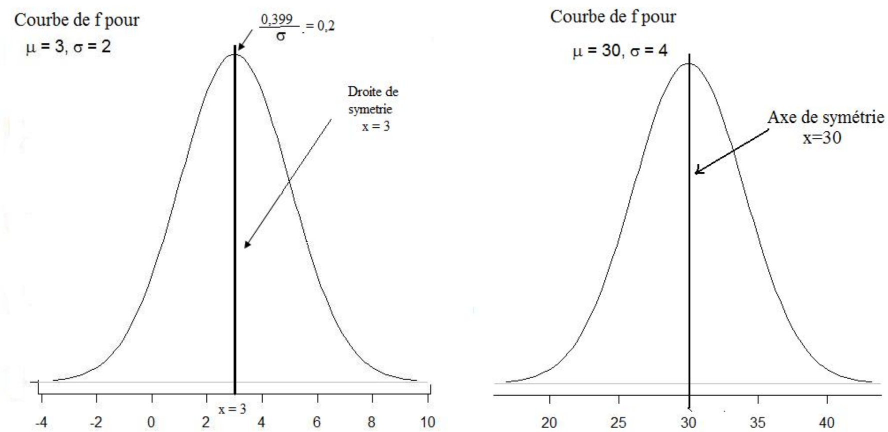

FIGURE 6.3 – Courbe de la densité de la loi Normale

Dans la pratique la loi exponentielle est souvent utiliser pour représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.

1. Durée de fonctionnement d'un appareil électrique avant la première panne.
2. Temps qui nous sépare de la prochaine crise financière, du prochain appel téléphonique...

6.3 Loi Normale (ou de Laplace-Gauss)

Définition 45. *Une variable aléatoire est dite Normale (ou parfois normalement distribuée) de paramètres μ et σ si sa densité est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

La loi Normale est notée $N(\mu, \sigma)$; Si X suit une loi $N(\mu, \sigma)$ alors $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$.
Le graphe de la densité d'une loi Normale est une courbe en cloche (voir la figure qui suit). La courbe de f est symétrique par rapport à l'axe $x = \mu$.

6.3.1 Loi Normale centrée réduite

Définition 46. *Une variable aléatoire est dite centrée et réduite si sa moyenne est nulle est sa variance est 1. C à d $X \sim N(0, 1)$.*

L'usage s'est établi de noter la fonction de répartition d'une variable normale centrée

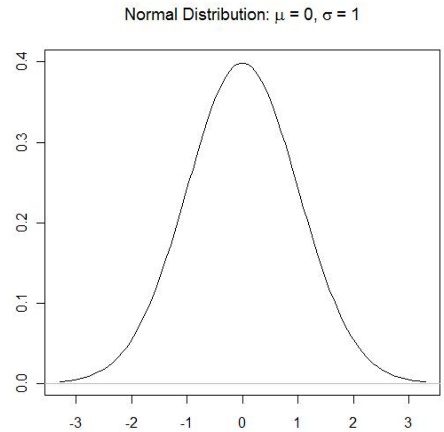

Figure 6.4 – Densité de la loi Normale N(0,1)

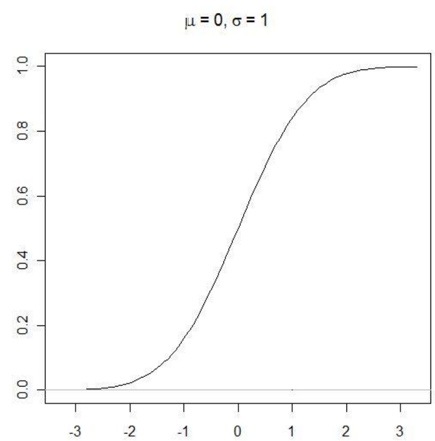

Figure 6.5 – Fonction de répartition de la loi Normale

réduite par le symbole Φ. En clair

$$\Phi(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$

Remarque : Comme la loi Normale est continue alors, $\Phi(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a)$.

Calclul de probabilité pour la loi N(0,1)

Proposition 47. *Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(0,1)$, alors*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Ceci est vrai pour les inégalités strictes ($<$ au lieu $\leq$) car la loi N(0,1) est continue.

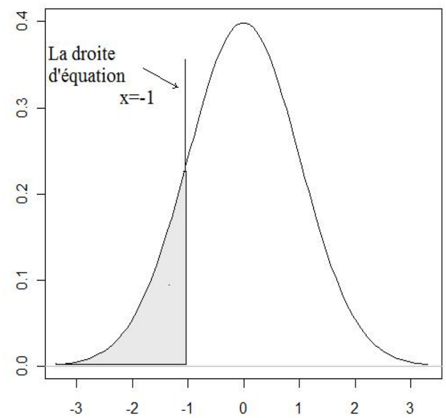

FIGURE 6.6 – $\mathbb{P}(Z < -1) = \phi(-1)$ est l'aire sous la courbe de f

La fonction de répartition de la loi normale est déficile à exploité sous sa forme intégral, par suite on fait recourt à l'utilisation des tables statistiques.
Remarque : $\phi(a) = \mathbb{P}(Z < a)$ est l'aire comprit entre la courbe de la densité f de Z, l'axe des absisses et la droite vérticale $x = a$.
Propriétés :

— La loi normale $N(0, 1)$ est symétrique autour de 0. C à d $\phi(-a) = 1 - \phi(a)$
— Soit X de loi normale $N(\mu, \sigma)$, alors le mode=mediane = moyenne=μ.
— 95% des valeurs de la loi normale $N(0, 1)$ sont concentrées dans l'intervalle $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

Calcul de probabilité pour la loi $N(\mu, \sigma)$.

Proposition 48. *Si X est une variable aléatoire Normale $N(\mu, \sigma)$ alors la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi Normale $N(0, 1)$.*
Par conséquent, on peut exprimer la fonction de répartition de X de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma}) \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) \\ &= \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

Application : Soit X une variable aléatoire de loi $N(3, 2)$. Pour calculer la probabilité $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 7)$, on procède comme suit : Soit Z la variable aléatoire $Z = \frac{X-3}{2}$. Comme

$X \sim N(\mu, \sigma)$ alors par la proposition précédente $Z \sim N(0, 1)$. En plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(3 \leq X \leq 7) &= \mathbb{P}(\frac{3-3}{2} \leq \frac{X-3}{2} \leq \frac{7-3}{2}) \\
&= \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2) \\
&= \phi(2) - \phi(0).
\end{aligned}$$

On utilise maintenant la table de la loi centrée et réduite qui donne les valeurs de ϕ.

Théorème central limite

On a vu dans le chapitre précédent que les lois discrètes tendent les une vers les autres sous certaines conditions de type la taille de la population est grande.

Proposition 49. *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires (discrètes ou continues) indépendantes, de même loi, d'espérance μ et de variance σ. Alors lorsque la taille de l'échantillon n devient grande*

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad \textit{suit approximativement une loi } N(0, 1).$$

Application 1 : Approximation normale de la loi Binomiale :
Soit X une variable aléatoire de loi Binomiale $B(n, p)$, alors si $n \geq 18$ la loi de X peut être approchée par une loi Normale de la manière suivante

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{suit une loi normale} \quad N(0, 1)$$

on peut aussi écrire $X \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Application 2 : Approximation normale de la loi de Poisson :
Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors si $\lambda \geq 30$ la loi de X peut être approchée par une loi Normale de la manière suivante

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{suit une loi normale} \quad N(0, 1)$$

on peut aussi écrire $X \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

6.4 Lois issues de la loi Normale

6.4.1 Loi Khi-deux à n degré de liberté $\chi^2_{(n)}$

Cette loi joue un rôle important dans la théorie des tests statistiques. La loi Khi-deux est obtenue en additions des carrées de variables aléatoires Gaussiennes, alors elle ne prend que des valeurs positives.

Définition 50. *Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi normale $N(0, 1)$. Alors*

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + ... + X_n^2$$

suit une loi Khi-deux de n degrés de liberté. Cette loi est notée $\chi^2_{(n)}$, et elle possède la fonction de densité suivante

$$f(x) = C_n x^{n/2-1} e^{-x/2},$$

ou C_n est telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

Propriétés :

1. Si $n > 2$, alors le mode de la loi $\chi^2_{(n)}$ est égal à $n - 2$.
2. $\mathbb{E}(X) = n$ et $Var(X) = 2n$.
3. **Additivités :** Soient $X_1 \sim \chi^2_{(n_1)}$,...,$X_k \sim \chi^2_{(n_k)}$ k variables aléatoires indépendantes, alors

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_k$$

suit une $\chi^2_{(n)}$ de degré de libérté $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Proposition 51. *Soit X une variable aléatoire de loi $\chi^2_{(n)}$, alors, quand n devient grand ($n \to +\infty$),*

$$\frac{X - n}{\sqrt{2n}} \longrightarrow N(0, 1),$$

ou bien

$$X \approx N(n, \sqrt{2n}).$$

(en pratique l'approximation est satisfaisante quand $n > 30$)

6.4.2 Loi de Student à n degré de liberté $\mathcal{T}(n)$

Cette loi joue un rôle important dans l'estimation par intervalle de confiance. Elle est symétrique, de moyenne nulle et dépend d'un seul paramètre n appelé nombre de degrés de liberté.

L'aspect de la courbe variera selon le nombre de degrés de liberté n (de façon générale, elle est plus aplatie que $N(0, 1)$ et quand n augmente ($n > 30$) les 2 courbes se confondent)

Définition 52. *Soit $X \sim N(0, 1)$ et $Y \sim \chi^2_{(n)}$, alors la variable*

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}},$$

suit une loi dite de Student, notée t_n, de fonction densité

$$f_{t_n}(x) = c_n(1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}},$$

où c_n est telle que $\int_{\mathbb{R}} f_{t_n}(x)dx = 1$.

Propriétés :

1. Si X suit une loi de Student t_n. Alors $\mathbb{E}(X) = 0$ si $n > 1$.
2. $Var(X) = \frac{n}{n-2}$, si $n > 2$

Proposition 53. *Soit X une variable aléatoire de loi t_n, alors, quand n devient grand ($n \to +\infty$),*

$$X \longrightarrow N(0,1),$$

(en pratique l'approximation est satisfaisante quand $n > 30$)

6.4.3 La loi de Fischer-Snedecor ($F(n_1, n_2)$)

Définition 54. *Soient $Y_1 \sim \chi^2_{(n_1)}$ et $Y_2 \sim \chi^2_{(n_2)}$ deux variables aléatoires indépendantes. Alors*

$$F = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2},$$

suit une loi de Fischer-Snedecor notée $F(n_1, n_2)$, de fonction de densité

$$f_{F(n_1,n_2)}(x) = c_{n_1,n_2} t^{n_1/2-1}(n_1 t + n_2)^{(n_1+n_2)/2}, \quad t > 0.$$

Les paramètres n_1 et n_2 de loi $F(n_1, n_2)$ sont appelé aussi degrés de liberté.

Propriétés : Si X suit une loi de Fischer-Snedecor, alors

1. $\mathbb{E}(X) = \frac{n_1}{n_2-2}$, si $n_2 > 2$.
2. $Var(X) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$, si $n > 4$