Probabilité

Université Hassan II Casablanca
FSJES Ain Sebaâ

Chapitre 1

Analyse Combinatoire

Opérations ensemblistes

Soient Ω un ensemble A, B et C trois sous - ensembles de Ω.

On définit les opérations ensemblistes suivantes :

- Intersection de A et B est l'ensemble: $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \ \text{ et } \ x \in B\}$
- Réunion de A et B est l'ensemble: $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}$
- Complémentaire de A est l'ensemble: $\bar{A} = C_{\Omega}^{A} = \{x \in \Omega / x \notin A \}$
- La différence des ensembles A et B est l'ensemble:

$$A - B = A / B = \{x \in \Omega / x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

- La différence symétrique est l'ensemble: $A \Delta B = (A \cup B) / (A \cap B)$

Propriétés des opérations ensemblistes

- $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \qquad (A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B)$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **(Lois de MORGAN)**
- $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \Omega, x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$

Propriétés des opérations ensemblistes

Plus généralement, si $I \subset IN$, et $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles de Ω alors :

- $\bigcup_{i\in I} E_i = \{x \in \Omega / \exists i \in I,\ x \in E_i\}$
- $\bigcap_{i\in I} E_i = \{x \in \Omega / \forall i \in I,\ x \in E_i\}$

Les lois de MORGAN généralisées sont données par:

- $\overline{\bigcap_{i\in I} E_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{E_i}$
- $\overline{\bigcup_{i\in I} E_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{E_i}$

Propriétés des opérations ensemblistes

Si on a:

- $\Omega = \bigcup_{i \in I} E_i$
- $E_i \cap E_j = \varnothing \quad \forall i, j \in I$ avec $i \neq j$
- $E_i \neq \varnothing \quad \forall i \in I,$

Alors $(E_i)_{i \in I}$ forme une partition de Ω

Produit cartésien d'ensembles

Soient A et B sont deux ensembles non vides. On définit le produit cartésien de A et B comme suit:

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Propriétés des opérations ensemblistes

Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I = \{1,2,..,n\}}$ est une famille d'ensembles de Ω

alors on définit le produit cartésien des n ensembles A_i, $1 \le i \le n$ comme suit :

$$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \left\{ \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) / \, a_i \in A_i, \;\; 1 \le i \le n \right\}$$

Remarque:

Le produit cartésien n'est pas commutatif, c'est-à-dire dans le cas général on a :

$$A \times B \neq B \times A$$

- L’objectif de **l’analyse combinatoire** est le comptage des groupes d’éléments que l’on peut construire à l’aide des éléments d’un ensemble fini.

- **L’analyse combinatoire** permet de répondre à plusieurs problèmes de calcul des probabilités basés sur la détermination des choix possibles.

Eléments discernable et indiscernable

- Il existe deux types d'éléments qui forment les ensembles qui sont couramment étudiés:

<u>Eléments discernables:</u>

Ce sont les éléments qui sont tous différents.

Exemple 1: $\Omega = \{a, b, c, d\}$

<u>Eléments indiscernables:</u>

Ce sont les éléments qui ne sont pas tous distingués.

Exemple 2 : $\Omega = \{a, a, a, b, b, c, c, c, c, d, d\}$

Disposition

- **La disposition** est **un groupe d'éléments pris d'un ensemble**. On peut distinguer plusieurs types de dispositions .

  - <u>**Disposition sans répétition:**</u>

    C'est une disposition dont chaque élément ne peut apparaitre plus qu'une fois.

Exemple 1 *:*

Soit une urne qui contient deux boules numérotées 1 et 2. On tire sans remise les deux boules successivement.

Alors les résultats possibles sont: (1,2) et (2,1).

Donc les couples (1,2) et (2,1) sont des dispositions sans répétition.

Disposition

❖ **Disposition avec répétition:**

C'est une disposition dont chaque élément peut apparaitre plus qu'une fois.

Exemple 2 :

Soit une urne qui contient deux boules numérotées 1 et 2.

Supposons que la première boule tirée est remise dans l'urne avant de réaliser le second tirage.

Alors les résultats possibles sont: (1,1) ; (1,2); (2,1) et (2,2).

Donc les couples (1,1) ; (1,2); (2,1) et (2,2) sont des dispositions avec répétition.

Disposition

❖ **Disposition ordonnée:**

C'est une disposition dont l'emplacement des éléments joue un rôle dans la composition de celle-ci.

Exemple 1:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

❖ **Disposition non ordonnée:**

C'est une disposition dont l'emplacement des éléments ne joue aucune rôle dans la composition de celle-ci.

Exemple 2 :

$$\Omega = \{2, 1, 4, 5, 3, 6\}$$

Multiplets

- Soient E_1 ,E_2,…,E_N N ensembles formés d'éléments **tous discernables**.

  Un multiplet est **une disposition ordonnée** $(a_1, a_2, ... a_N)$ qui contient N éléments

  où $a_i \in E_i (i = 1,.., N)$

- Le nombre de multiplets qu'on peut construire à partir des ensembles E_1 ,E_2,…,E_N est

  égale à : $n = n_1 \times n_2 \times ... \times n_N$

  où $n_i = Card(E_i), i = 1, 2, .., n$

  $Card(E)$ = « Cardinal de E » = nombre d'éléments d'un ensemble de E.

Exemple 1:

Pour avoir une tenue (une chemise , un pantalon et une paire de chaussures), une personne peut choisir une chemise parmi *6 chemises*, un pantalon parmi *5 pantalons* et une paire de chaussures parmi *3 paires de chaussures*.

Alors cette personne peut s'habiller de $90 = 6 \times 5 \times 3$ façons différentes.

Exemple 2:

Un investisseur financier peut choisir un portefeuille diversifié d'actions relatives à divers secteurs d'activité: Une action parmi *6 du secteur agroalimentaire*, une action parmi *4 du secteur énergétique*, et une action parmi *3 du secteur bancaire*.

Alors le nombre de choix possibles pour un éventuel investissement est égal à :

$$72 = 6 \times 4 \times 3$$

Permutation sans répétition

- **Une permutation sans répétition** d'un ensemble de n éléments est **une disposition ordonnée** de ces éléments dont chaque élément ne figure qu' une seule fois et occupe un rang donné.

- Le nombre de permutation sans répétition qu' on peut former à partir d'un ensemble de n éléments est égal à $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

Exemple 1:

Les permutations qu'on peut construire à partir de l'ensemble E={a,b,c} sont:

(a,b,c),(a,c,b)

(b,a,c),(b,c,a)

(c,a,b),(c,b,a).

Le nombre de permutation est égal à $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Permutation sans répétition

Exemple 2:

Soit E un ensemble constitué de n lettres de l'alphabet. Etant donné un tableau formé de p cases. On veut écrire une lettre dans chacune des cases de ce tableau.

Case 1	Case 2	…….			Case p

- Pour la case N°1, on va choisir une seule lettre parmi n lettres.

  Alors on aura n choix possibles pour la première case.

- Dans notre cas , on suppose que p = n.

Permutation sans répétition

Une fois la case N°1 est occupée, il ne reste à choisir qu’:

- Une lettre parmi les (n-1) lettres restantes pour la case N° 2;
- Une lettre parmi les (n-2) lettres restantes pour la case N° 3;

……………………………

- La dernière lettre parmi restante pour la case N° p;

D’où le résultat:

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Permutation avec répétition

- Soit E un ensemble construit à partir de k sous-ensemble discernables E_1, E_2, …, E_k et contient n éléments .

- Les E_i sont supposés discernables entre eux mais les éléments formant E_i ne le sont pas. On a $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ où n_i est le cardinal de E_i

Exemple:

L'ensemble E= {a,a,a,b,b,c,c,c,c} est formé de 3 groupes d'éléments discernables qui sont :

E_1= {a,a,a}

E_2 ={b,b}

E_3 ={c,c,c,c}.

Permutation avec répétition

- **Une permutation avec répétition** de n éléments d'un ensemble E est **une disposition ordonnée** dont le premier élément figure **n_1 fois**, le second **n_2 fois**,… et le dernier élément figure **n_k fois**.

- Le nombre de permutation avec répétition est égal à

$$P_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Exemple:

Soit E = {7,1,7,1} , E_1 = {1,1} et E_2 = {7,7} Alors on aura :

1177, 1717, 1771, 7711,7171, 7117

Le nombre est égal à : $P_n = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = \frac{24}{4} = 6$

Arrangements sans répétition

- **<u>Un arrangement sans répétition</u>** de p éléments choisis parmi n est **<u>une disposition ordonnée sans répétition</u>** de p éléments choisis parmi n de E. On suppose que p < n.

Exemple:

Soit E = {a,b,c}, les arrangements sans répétition sont:

{a,b}, {a,c}

{b,a}, {b,c}

{c,a}, {c,b}

- Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments choisis parmi n est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arrangements sans répétition

Exemple 1:

Supposons qu' on a 5 candidats A,B,C,D et E dans une assemblée qui vont élire un bureau comprenant 3 personnes (président, vice-président et trésorier).

Alors le nombre de bureaux possibles est égale à

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{120}{2} = 60$$

Exemple 2:

Etant donné 3 joueurs A,B et C qui lancent chacun un dé à six faces. Alors le nombre de résultats possibles est égal à

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = \frac{720}{6} = 120$$

Exemple 3:

Soit E un ensemble constitué de n lettres de l'alphabet. Etant donné un tableau formé de p cases. On veut écrire une lettre dans chacune des cases de ce tableau.

Case 1	Case 2	…….			Case p

- Pour la case N°1, on va choisir une seule lettre parmi n lettres. Alors on aura n choix possibles pour la première case.

- Dans ce cas, on suppose que $n > p$ et qu' une lettre ne peut être écrite qu'une seule fois

Arrangements sans répétition

Une fois la case N°1 est occupée, on aura:

- (n-1) lettres restantes pour la case N° 2;
- (n-2) lettres restantes pour la case N° 3;

……………………………

- (n-p+1) lettres restantes pour la case N° p;

D'où le résultat:

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Arrangements avec répétition

- **Un arrangement avec répétition** de p éléments choisis parmi n est **une disposition ordonnée avec répétition** de p d'entre les n éléments.

Exemple 1:

Soit E = {a,b,c}, les arrangements de 2 éléments qu'on peut former à partir des éléments de E sont:

{a,a}, {a,b} ,{a,c}

{b,a}, {b,b}, {b,c}

{c,a}, {c,b}, {c,c}

- Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments qu'on peut former à partir de n éléments est égal à $\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{p.fois} = n^p$

Arrangements avec répétition

Exemple 2:

Supposons que le numéro de téléphone est constitué de 9 chiffres. Alors le nombre de lignes téléphoniques qu'on peut accorder dans une ville est égal à

$$\underbrace{10\times10\times\ldots\times10}_{9.\,fois}=10^9$$

NB: Le numéro 000000000 peut être considéré comme un numéro de téléphone.

Arrangements avec répétition

Exemple 3:

Soit E un ensemble constitué de n lettres de l'alphabet. Etant donné un tableau formé de p cases. On veut écrire une lettre dans chacune des cases de ce tableau.

Case 1	Case 2	…….			Case p

- Pour la case N°1, on va choisir une seule lettre parmi n lettres. Alors on aura n choix possibles pour la première case.

- Dans ce cas, la répartition est permise. Donc une même lettre peut être écrite dans plusieurs cases.

Arrangements avec répétition

Dans ce cas, on aura:

- Le choix entre n lettres possibles pour la case N° 2;
- Le choix entre n lettres possibles pour la case N° 3;

……………………………

- Le choix entre n lettres possibles pour la case N° p;

D'où le résultat:

$$\underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{p.fois} = n^p$$

Combinaison sans répétition

- **La combinaison sans répétition** de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E est **une disposition non ordonnée et sans répétition** de p éléments choisis parmi n éléments.

- Le nombre de combinaison sans répétition de p éléments qu'on peut former à partir de n éléments est égal à $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple:

Supposons qu' on a 5 candidats A,B,C,D et E dans une assemblée qui vont élire un bureau comprenant 3 personnes (<u>la fonction de chacun des membres n'est pas spécifiée</u>). Alors le nombre de bureaux possibles est égal à

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times2\times1} = \frac{120}{12} = 10$$

Combinaison avec répétition

- **La combinaison avec répétition** de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E est **une disposition non ordonnée et avec répétition** de p éléments choisis parmi n éléments.

- Le nombre de combinaison avec répétition de p éléments choisis parmi n éléments est égal à

$$C_{n-p-1}^{p} = \frac{(n-1+p)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple:

Soit E = {a,b,c}, les combinaisons avec répétition qu'on peut former à partir des éléments de E sont:

{a,a}, {a,b} ,{a,c}

{b,b}, {b,c},{c,c}

Propriété de Combinaison Sans Répétitions

- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ **Relation de PASCAL**

Cette relation donne lieu au **triangle de PASCAL**.

p / n	0	1	2	3	....
0	C_0^0				
1	C_1^0	C_1^1			
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
$\vdots$					

p / n	0	1	2	3	4	5	....
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
			$\vdots$				

Propriété de Combinaison Sans Répétitions

Soient $a, b \in IR$ et $n \in IN$, on a:

- $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$ **(Binôme de NEWTON)**

- Si $a = b = 1$ on aura :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$$

Résumé sur des cas pratiques

- **Cas de l'urne:**

Il s'agit de tirer p éléments à partir d'une urne qui contient n éléments. L'application de la formule dépend de deux éléments qui sont:

- L'ordre des éléments dans l'urne.
- Avec ou sans remise des éléments dans l'urne.

	L'ordre est pris en compte	**L'ordre est n'est pas pris en compte**
Sans remise	A_n^p	C_n^p
Avec remise	n^p	C_{n-p-1}^p

Résumé sur des cas pratiques

- **Cas de cases:**

Il s'agit de placer p objets dans n cases. Le nombre de possibilités dépend de deux éléments qui sont:

- ❖ Discernable ou non des objets à placer.
- ❖ Nombre d'objets à placer par case.

	Discernables des objets	Non discernables des objets
Un seul	A_n^p	C_n^p
Un ou plusieurs	n^p	C_{n-p-1}^p

Exercices

Exercice 1:

Une organisation contient 25 membres dont 4 gestionnaires.

De combien de manières peut-on former un comité composé de 3 membres parmi lesquels on trouve :

a) un et un seul gestionnaire ?

b) au moins un gestionnaire ?

4 Gestionnaires	21 Non Gestionnaires
4	**21**

1 Gestionnaire et	2 Non Gestionnaires
1	**2**

$\Rightarrow A \cap B$

$\Downarrow$

$C_4^1 \times C_{21}^2$

La réponse est : $M = C_4^1 \times C_{21}^2 = 4 \times 210 = 840.$

Exercices

4 Gestionnaires (G) 21 Non Gestionnaires (NG)

4	21

1 G et 2 NG		ou	2 G et 1NG		ou	3 G et 0 NG	
1	2		2	1		3	0
$A \cap$	B	$\cup$	$C \cap$	D	$\cup$	$C \cap$	D
C_4^1 x	C_{21}^2	+	C_4^2 x	C_{21}^1	+	C_4^3	

le nombre de comités comprenant un seul gestionnaire

$$\left(C_4^1 \times C_{21}^2\right)$$

le nombre de comités comprenant 2 gestionnaires

$$\left(C_4^2 \times C_{21}^1\right)$$

le nombre de comités de 3 gestionnaires

$$C_4^3$$

La réponse est : $M = C_4^1 \times C_{21}^2 + C_4^2 \times C_{21}^1 + C_4^3 = 970.$

Chapitre 2

Introduction au Calcul des Probabilités

Définitions et Vocabulaires

1. Expérience aléatoire

L'expérience aléatoire est une expérience dont le résultat n'est pas connu avec certitude à l'avance.

Exemple :

- ✓ Lancement d'une pièce de monnaie
- ✓ Lancement d'un dé

2. Espace fondamental

C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire , on le note par Ω .

Exemple :

- ✓ Dans le cas de lancement d'une pièce de monnaie , $\Omega = \{P, F\}$
- ✓ Dans le cas de lancement d'un dé, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

3. Evénement

C'est une partie de l'espace fondamental **Ω** . Il existe plusieurs types d'événement :

3.1 Evénement certain : c'est l'événement qui est constitué de tous les éléments de **Ω**.

3.2 Evénement impossible : c'est l'événement qui ne contient aucun élément de **Ω** , on le note par $\varnothing$.

3.3 Evénement contraire de A : c'est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartient pas à A , on le note par $\bar{A}$.

3.4 Eventualité : c'est un événement qui est constitué d'un seul élément de Ω.

Remarque

Les événements sont des éléments de $P(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω)

Le couple $(\Omega, P(\Omega))$ est appelé espace probabilisable

4. Définition de probabilité

Soit $(\Omega, P(\Omega))$ un espace probabilisable et p une application définie comme suit :

$$p: \ \Omega \mapsto [0,1]$$
$$A \rightarrow p(A)$$

p est une probabilité si elle vérifie les éléments suivants:

- $p(\Omega) = 1$
- $\forall A \in P(\Omega)$, on a : $p(A) \geq 0$
- Pour tout événement A et B

  On a : $p(A \cup B) = p(A) + P(B) - p(A \cap B)$

Le triplet $(\Omega, P(\Omega), p)$ est appelé un espace de probabilité.

Propriétés de probabilité

Soient A et B deux évènements:

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A) = 1 - p(\overline{A})$
- $A \subset B \quad \Longrightarrow p(A) \leq p(B)$
- $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$
- $p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(A \cap B)$

Hypothèse d'équiprobabilité

Etant donnée une expérience aléatoire E qui possède n résultats possibles, i.e :

$$\Omega = \{R_1, \ldots, R_n\}$$

On dit que les événements élémentaires $\{R_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$ sont équiprobables s'ils ont la même probabilité d'apparition.

$$p(\Omega) = 1 \Rightarrow p\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{R_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} p(\{R_i\}) = n\, p(\{R_i\}) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

$$\Rightarrow p(\{R_i\}) = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Hypothèse d'équiprobabilité

Si $A \subset \Omega$ avec $Card(A) = m$, la probabilité de l'événement sous l'hypothèse d'équiprobabilité est :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire suivante : « Lancement d'un dé » , alors:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

On a:

- $P(\{i\}) = \dfrac{1}{6}$
- Si $A = \{1,2,4\}$ alors $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Exemple :

Etant donné 400 investissements en portefeuille de devises dont 160 investissements en $; 240 investissements en € et 90 investissements dans les deux devises.

a) Quelle est la probabilité qu'un investisseur investit au moins dans une devise ?

b) Quelle est la probabilité qu'il détient un portefeuille uniquement en € ?

Solution :

Soient :

- A l'événement : « Portefeuille investi en -$-»
- B l'événement : « Portefeuille investi en -€-».

Propriétés de probabilité

a) $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \;= \dfrac{160}{400} + \dfrac{240}{400} - \dfrac{90}{400} \;= 0.4 + 0.6 - 0.225 = 0.775$

b) Il faut prendre l'événement :

- $B/(A \cap B)$
- $Card\left[B/\left(A \cap B\right)\right] = 240 - 90 = 150$

$$\Longrightarrow \quad p(B/(A \cap B)) = \frac{150}{400} = 0.375$$

$$\Longrightarrow \quad p\left(B \cap \overline{A}\right) = p(B) - p(A \cap B)$$
$$= 0.6 - 0.225 = 0.375$$

Probabilités conditionnelles

- Soient $\left(\Omega, P(\Omega), p\right)$ un espace probabilisé fini et $A, B \in P(\Omega)$ tel que : $p(A) \neq 0$

- La probabilité conditionnelle de B par rapport à A qui se lit « probabilité de B sachant A » est définie par :

$$p(B/A) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Formule des Probabilités Totales et de Bayes

- Soient $(B_i)_{i=1,\dots,n}$ une partition de Ω et $A \in P(\Omega)$ tel que : $p(A) \neq 0$

- La formule des probabilités totales est donnée par l'expression suivante:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i)$$

- Formule de Bayes est définie comme suit:

Comme $p(A \cap B_i) = p(A / B_i) \cdot p(B_i)$ alors $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A / B_i) \cdot p(B_i)$

Par conséquence on aura:

$$p(B_i / A) = \frac{p(B_i) \times p(A / B_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(B_j) \times p(A / B_j)}$$

Formule des Probabilités Totales et de Bayes

- Soient $(B_i)_{i=1,\dots,n}$ une partition de Ω et $A \in P(\Omega)$ tel que : $p(A) \neq 0$

- La formule des probabilités totales est donnée par l'expression suivante:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i)$$

- Formule de Bayes est définie comme suit:

Comme $p(A \cap B_i) = p(A / B_i) \cdot p(B_i)$ alors $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A / B_i) \cdot p(B_i)$

Par conséquence on aura:

$$p(B_i / A) = \frac{p(B_i) \times p(A / B_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(B_j) \times p(A / B_j)}$$

Exemple:

Dans une enquête, 20% des investisseurs investissent en obligations. Parmi ceux-ci 70% investissent aussi en actions . Ainsi parmi ceux qui ne placent pas en obligations, 15% détiennent des actions.

Quelle est la probabilité qu’un investisseur pris au hasard investit :

1) A la fois dans les obligations et les actions ?

2) Dans les obligations, sachant qu’il détient des actions ?

Probabilités conditionnelles

- Considérons les deux événements caractérisant ces deux types d'investisseurs :

  $I_1 =$ Investisseurs teneurs d'obligations

  $I_2 =$ Investisseurs non teneurs d'obligations

On a: $I_1 \cap I_2 = \varnothing, \quad p(I_1) = 0.2, \quad p(I_2) = 1 - p(I_1) = 0.8$

- Soit A l'événement « investisseur choisi, investit en actions »

Alors on obtient: $p(A/I_1) = 0.7$ et $p(A/I_2) = 0.15.$

$$p(A/I_1) = \frac{p(A \cap I_1)}{p(I_1)} \quad \Rightarrow p(A \cap I_1) = 0.7 \times 0.2 = 0.14.$$

Probabilités conditionnelles

D'après la Formule de Bayes on a :

$$p\left(I_1 / A\right) = \frac{p\left(I_1\right).p\left(A / I_1\right)}{p\left(I_1\right)p\left(A / I_1\right) + p\left(I_2\right)p\left(A / I_2\right)}$$

$$= \frac{0.2 \times 0.7}{0.2 \times 0.7 + 0.8 \times 0.15}$$

$$= 0.5384$$

Evénements indépendants

- Soient $A, B \in P(\Omega)$, les événements A et B sont dits indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

- Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ A et B sont indépendants si et seulement si

$$\begin{cases} p(A / B) = p(A) \\ p(B / A) = p(B) \end{cases}$$

- On dit que les événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $P(\Omega)$ sont indépendants dans leur ensemble, si et seulement si

$$p\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ik}\right) = \prod_{j=1}^{k} p(A_{jk})$$

Evénements indépendants

Exemple

Nous jetons un dé deux fois. Soit l'événement A : obtenir « face 1 » au premier jet ; l'événement B : obtenir « face 1 » au second jet et l'événement C : obtenir « le même résultat aux deux jets » .

Vérifions l'indépendance des événements A, B, et C.

- $p(A\cap B)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=p(A)\cdot p(B)$
- $p(A\cap C)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=p(A)\cdot p(C)$
- $p(B\cap C)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=p(B)\cdot p(C)$

Donc A, B, et C sont indépendants deux à deux.

Evénements indépendants

Par contre, on a:

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{6}{36}$$

Donc A, B, et C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Chapitre 3

Variables Aléatoires Discrètes

à une Seule Dimension

Les variables aléatoires discrètes

1. Définition

Une variable aléatoire est définie lorsqu'on associe à chacun des résultats possibles d'une expérience aléatoire un nombre réel x .

Autrement dit ,

C'est une application X de Ω dans $\mathbb{R}$, i.e :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega_i \to X_i = X\left(\omega_i\right)$$

Une variable aléatoire est dite discrète si elle prend des valeurs entières.

Exemple

Considérons l'expérience aléatoire suivante :

« **Lancement d'une pièce de monnaie** »

Soit X une variable aléatoire définie comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = \mathbf{O} & \text{Si le résultat est pile} \\ \boldsymbol{X} = \mathbf{1} & \text{Sinon} \end{cases}$$

Alors on a :

$$X : \Omega = \{P, F\} \rightarrow \{0,1\}$$

$$\omega_i \rightarrow X_i = X(\omega_i)$$

Si $\omega_1 = P$ alors $X(\omega_1) = X(P) = 0$

Si $\omega_2 = F$ alors $X(\omega_2) = X(F) = 1$

2. Loi de probabilité (distribution)

La loi (ou distribution) de probabilité d'une variable aléatoire X est une fonction qui associe les valeurs possibles de X à la probabilité qui leur correspond.

Autrement dit, C'est l'ensemble des valeurs de X et les probabilités correspondantes , i.e :

$$\left\{\left(x_i, p_i\right) / i = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

Avec : $p_i = P\left[X\left(\omega_i\right) = x_i\right]$ où $p_i = p[X = x_i]$

On a : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

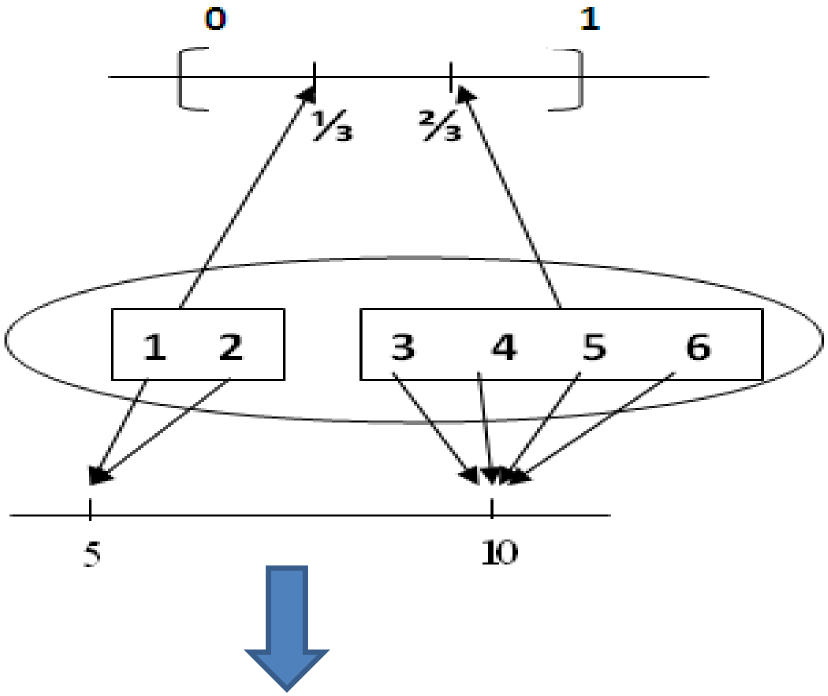
Exemple : Dans l'exemple précédent , la probabilité d'avoir pile est : 0,5 et celle d'avoir face est 0,5. Le tableau suivant donne la loi de probabilité de variable aléatoire étudiée.

Résultat de l'expérience	**Pile**	**Face**
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	**0**	**1**
Les probabilités de réalisation des résultats $P(X=x_i)$	**0,5**	**0,5**

Expérience aléatoire : Lancement d'une pièce de monnaie

Exemple : Soit l'expérience aléatoire suivante : **« Lancement d'un dé ».**

Supposons qu'un individu reçoit 5 si l'un des numéros 1ou 2 est obtenu, et 10 si l'un des numéros 3,4,5 ou 6 est le résultat.



Résultat de l'expérience	(1,2)	(3,4,5,6)
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	5	10
Les probabilités de réalisation des résultats $P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Les variables aléatoires discrètes

3. Fonctions de répartition

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie comme suit :

$$F : I \to [0,1]$$

$$x_i \mapsto F(x_i) = p[X \le x_i] = p[X = x_1] + \dots + p[X = x_i]$$

où $I \subset \mathbb{R}$

$$F(x_i) = p_1 + p_2 + \dots + p_i = \sum_{k=1}^{i} p_k$$

Propriétés

- F est une fonction positive , croissante et prend ses valeurs dans $[0,1]$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- F est continue à gauche $[x_i , x_{i+1}]$
- F reste constante sur l'intervalle

Exemple :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité par le tableau suivant :

X_i	1	2	3	4
$P_i = P(X=xi)$	0,2	0,3	0,4	0,1
$F(x_i)$	0,2	0,5	0,9	1

4. Caractéristique d'une variable aléatoire discrète

4.1 Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X de loi de probabilité $\left(x_i, p_i\right)$ pour i = 1,..,n , notée $E\left(X\right)$, est donnée par la quantité suivante:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i \qquad (9)$$

Exemple :

Considérons deux joueurs A et B à pile ou face.

Si le résultat de lancement est pile , le joueur A paye 2Dh au joueur B, sinon , le joueur B paye 4Dh au joueur A.

Calculer l'espérance mathématique de gain du joueur A.

Solution

Soit X une variable aléatoire qui désigne le gain du joueur A.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est comme suit :

Expérience aléatoire : lancement d'une pièce de monnaie

Résultat de l'expérience (espace fondamental Ω)	Pile	face
Les valeurs associées aux résultats possibles xi	-2	4
Les probabilités associées aux résultats possibles Pi = P(X=xi)	0,5	0,5

Donc l'espérance mathématique est égale à :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{2}P(X=x_i)\times x_i=-2\times 0,5+4\times 0,5=-1+2=1$$

5. Propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires, a et b deux nombres réels.

- $E(aX+b)=aE(X)+b \qquad (8)$
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y) \qquad (9)$
- $E(X-Y)=E(X)-E(Y) \qquad (10)$

6. La variance et l'écart type

La variance d'une variable aléatoire X de loi de probabilité (x_i, p_i) pour i = 1,..,n , notée $V(X)$, est donnée par la quantité suivante:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 \qquad (11)$$

$$= \sigma_X^2$$

L'écart-type d'une variable aléatoire est donné par la formule suivante : $\sqrt{\sigma_X}$

7. Propriété de la variance

$$V(aX+b)=a^2V(x) \qquad (13)$$

Exemple :

Considérons deux joueurs A et B à pile ou face. Si le résultat de lancement est pile , le joueur A paye 2Dh au joueur B, sinon , le joueur B paye 4Dh au joueur A.

Calculer la variance de gain du joueur A.

Les variables aléatoires discrètes

Solution: Soit X une variable aléatoire qui désigne le gain du joueur A.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est comme suit :

Résultat de l'expérience (espace fondamental Ω)	Pile	face
Les valeurs associées aux résultats possibles xi	-2	4
Les probabilités associées aux résultats possibles Pi = P(X=xi)	0,5	0,5

Expérience aléatoire : lancement d'une pièce de monnaie

Donc l'espérance mathématique est égale à :

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{2}P(X=x_i)\times x^2{}_i=0,5\times 4+0,5\times 16=2+8=10$$

Alors: $$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2=10-1=9$$

Moments d'ordre supérieur à deux

- Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k, i.e:

$$m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i^k = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i^k$$

- Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k, i.e:

$$m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times \left[x_i - E(X)\right]^k = \sum_{i=1}^{n} p_i \times \left[x_i - E(X)\right]^k$$

- Le moment d'ordre 1 : $m_1 = E(X)$
- Le moment d'ordre 2: $m_2 = E(X^2)$

$$\Rightarrow \quad V(X) = m_2 - m_1^2$$

Fonction génératrice des moments

- La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X est la fonction :

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} p\left\{X = x_i\right\}$$

- Sachant que : $$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!} = \frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \ldots$$

- Alors:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = E\left(\frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \ldots\right)$$

Moments d'ordre supérieur à deux

$$M_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}E\left(X^k\right)=\frac{t}{1!}E(X)+\frac{t^2}{2!}E\left(X^2\right)+\ldots+\frac{t^n}{n!}E\left(X^n\right)+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}m_k=\frac{t}{1!}m_1+\frac{t^2}{2!}m_2+\ldots+\frac{t^n}{n!}m_n+\ldots$$

Exemple d'application

Un responsable de Maroc-Telecom a dénombré la demande journalière concernant l'annulation du téléphone fixe pour une période de 200 jours. La distribution obtenue se présente comme suit :

Demande d'annulation (X)	Nombre de jours
0	14
1	28
2	36
3	60
4	38
5	14
6	10

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une demande journalière dans l'intervalle $[E(X)-\sigma(X), E(X)+\sigma(X)]$

Exemple d'application

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0.07	0.14	0.18	0.3	0.19	0.07	0.05

b)

$$E(X) = 0.14 + 2\times 0.18 + 3\times 0.3 + 4\times 0.19 + 5\times 0.07 + 6\times 0.05$$
$$= 2.81$$

$$\Rightarrow \quad [E(X)]^2 = (2.81)^2 = 7.8961$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$[E(X)]^2 = (2.81)^2 = 7.8961 \quad \Rightarrow \quad E(X^2) = 0.14\times 1 + 0.18\times 4 + 0.3\times 9$$
$$+ 0.19\times 16 + 0.07\times 25 + 0.05\times 36$$
$$= 10.15.$$

Donc : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1.5013$

Exemple d'application

c)

$$\left[E-\sigma, E+\sigma\right]=\left[1.3087;4.3113\right]$$

$$\begin{aligned} p\left(1.3087 \leq X \leq 4.3113\right) &= F\left(4.3113\right)-F\left(1.3087\right) \\ &= 0.18+0.3+0.19 \\ &= 0.67. \end{aligned}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Uniforme

- Soit E une expérience aléatoire dont le cardinal de l'espace fondamental **Ω** est égal à n.
- Soit X une variable aléatoire tel que $X = w_i$ où $w_i\left(i=1,\ldots,n\right)\in\Omega$.

  X suit la loi Uniforme si et seulement si:

$$p\left(X=w_i\right)=\frac{1}{n}$$

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire suivante : « **Lancement d'un dé** »

Alors : $\Omega=\left\{1,2,3,4,5,6\right\}$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Uniforme

Soit X le numéro obtenu par cette expérience.

La valeur de X est l'élément de l'événement $A = \{i\}$ *où* $i = 1, 2, \ldots, 6.$

Alors:

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$p(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$
- $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

- Soit E une expérience aléatoire qui a **2 résultats possibles**.

- Soit **A l'événement** qui nous concerne.

- Soit **p la probabilité de succès** (réalisation de A) et q la probabilité d'échec

- Soit X = « le nombre de succès obtenu dans cette expérience», i.e:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, Si A est réalisé} \\ 0 & \text{, Si non} \end{cases}$$

Où :

$$\begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

X est une variable aléatoire qui suit **la loi de Bernoulli**, noté B(1,p) , qui est définie comme suit :

$$P:\{0,1\} \rightarrow [0,1]$$
$$X \longrightarrow p(X)$$

avec : $\begin{cases} p(X=1)=p \\ p(X=0)=q=1-p \end{cases}$

On écrit X $\rightarrow$ B(1,p)

Remarque: Cette expérience aléatoire est appelée l'expérience de **Bernoulli**.

Les propriétés de X sont :

- $E(X)=p$
- $V(X)=p.q=p(1-q)$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

Exemple :

Considérons l’expérience aléatoire suivante : « **Lancement d’un dé** »

On s’intéresse dans cette expérience au numéro de la face inférieure ou égale à 4.

Alors on a:

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $A = \{1,2,3,4\}$ est l’événement concerné
- $p = p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

La variable aléatoire définie par:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, Si le numéro obtenu est inférieur à 4} \\ 0 & \text{, Sinon} \end{cases}$$

Suit la loi de Bernoulli B(1,2/3).

La moyenne et la variance de X sont:

$$E(X) = p = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p) = \frac{2}{9}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Soit E l'expérience de Bernoulli.
- Soit **A l'événement** qui nous concerne.
- Soit **p la probabilité de succès** (réalisation de A) et q la probabilité d'échec.
- On répète l'expérience E **n fois** dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.
- Soit X= « le nombre de succès obtenu dans une expérience».

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{Si A est réalisé} \\ 0 & , \text{Si non} \end{cases} \qquad \text{où :} \qquad \begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

Exemple:

- Soit l'expérience aléatoire suivante: 'lancement d'une pièce de monnaie '.
  On note par P = 'Pile' et F ='Face'. On répète cette expérience **deux fois**, alors les résultats possibles sont: PP,PF,FP,FF.
- Soit X le nombre de pile obtenu dans cette expérience aléatoire.
- X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs suivantes: 0,1 et 2.
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant:

x_i	**0**	**1**	**2**	$\sum_i p_i$
$p(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4	1

$$\Rightarrow \quad p(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Soit Y= « le nombre de succès obtenu au cours de n expériences».

- La probabilité d'obtenir k succès exactement au cours des n expérience, i.e : $p\left[Y=k\right]$

- Soit E un ensemble constitué de n éléments (évènements). On veut former une disposition D de ***k* succès (réalisation de A)** à partir de l'ensemble E, i.e:

$$E=\left\{\underbrace{A,A,\ldots A,}_{k\ \text{fois}}\quad \underbrace{\bar{A},\bar{A},\ldots,\bar{A}}_{(n-k)\ \text{fois}}\right\}$$

L'événement D : « obtenir k réalisations de A lors des n expériences aléatoires ».

- Sachant que les événements sont indépendants alors la probabilité d'apparition de D est donnée par:

$$p\left(D\cap\bar{D}\right)=p\left(D\right)\times p\left(\bar{D}\right)=\underbrace{p\times p\ldots p}_{k\ \text{fois}}\times\underbrace{q\times q\ldots.q}_{(n-k)\ \text{fois}}=p^{k}\times q^{n-k}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Le nombre des dispositions contenant **k fois** l'événement A est égal à C_n^k . Donc

$$p[Y=k]=C_n^k p^k q^{n-k}$$

- Y est une variable aléatoire qui suit **la loi Binomiale**, notée B(n,p) , qui est définie comme suit :

$$p:\{0,1,2,\ldots,n\}\rightarrow[0,1]$$

$$Y \rightarrow p(Y)=p[Y=k]=C_n^k p^k q^{n-k}$$

On écrit Y $\rightarrow$ B(n,p)

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Remarques

- Soit X= « le nombre de succès obtenu dans une expérience».

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, Si A est réalisé} \\ 0 & \text{, Si non} \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

- Soit Y= « le nombre de succès obtenu au cours de n expériences indépendantes».

$$\Longrightarrow \quad Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli.

Les propriétés de Y sont :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np.q = np(1-q)$

Exemple

On lance un dé 5 fois. On s'intéresse au nombre 3 obtenu en total, i.e: la somme des résultats (numéros du dé) obtenu est égale à 3.

Soit X une variable aléatoire qui désigne la somme des résultats obtenus.

Donc X suit la loi binomiale de paramètre n = 5 et p = 1/6. C'est-à-dire :

$$X \sim B(5\ ;\ 1/6)$$

$$\begin{aligned} p &= p[X = 3] \\ &= C_5^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{250}{7776} = 0.032. \end{aligned}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Binomiale

Exemple:

Une photocopieuse produit des copies dont 1/3 sont défectueuses.

1. Caractériser la loi de probabilité de ce phénomène.
2. Calculer le nombre moyen de photocopies défectueuses et sa probabilité associée dans un paquet de 39 copies réalisées par la photocopieuse.

1. La photocopie réalisée est soit bonne soit non. Donc il s'agit d'une répétition de l'expérience de Bernoulli. Le phénomène peut être donc correctement modélisé par une loi binomiale. On aura donc :

$$X \sim B\left(39 \; ; \; \frac{1}{3}\right)$$

2. On a:

$$E(X) = np = 13 \qquad \text{et} \qquad p[X = 13] = C_{39}^{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{26} = 0{,}135$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Géométrique

- Soient **E l'expérience de Bernoulli** et **A l'événement « succès »** de probabilité **p.**

  La probabilité $\overline{A}$ est égale à **q = 1-p**.

- On répète l'expérience E **n fois** dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.

- Soit X = « le nombre d'expérience E avant l'obtention de l'événement A pour la première fois».

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Géométrique

- $p\left[X=k\right]$ représente la probabilité que l'événement A se produit pour la première fois durant la k$^{\text{ème}}$ expérience.

- Les (k-1) expériences précédentes ont pour résultat l'événement contraire $\overline{A}$

- Comme les expériences sont indépendantes, alors $p\left[X=k\right]=q^{k-1}p$

On écrit X $\rightarrow$ G(p)

Les propriétés de X sont :

- $E(X)=\dfrac{1}{p}$
- $V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

Exemple

On lance un dé plusieurs fois jusqu'à l'apparition de la face N°1. Quelle est la probabilité d'obtenir la face N°1 pour la première fois au 20ème lancer.

Soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face N°1 pour la première fois.

On a : $A=\{1\}$ et $\bar{A}=\{2,3,4,5,6\}$.

Alors $p(A)=\frac{1}{6}$ et $p(\bar{A})=\frac{5}{6}$ Donc:

$$p[X=20]=p\left(\underbrace{\bar{A}\ et\ \bar{A}\ et \ldots et\ \bar{A}}_{19.fois};\ et\ A\right)=\underbrace{p(\bar{A})\times p(\bar{A})\times\ldots\times p(\bar{A})}_{19.fois}\times p(A)=\left(\frac{5}{6}\right)^{19}\times\frac{1}{6}$$

Lois Discrètes Usuelles: Loi de Poisson

- La loi de Poisson est utilisée lorsque il s'agit d'étude d'un phénomène durant un laps infiniment petit. Elle est utilisée aussi dans les phénomènes d'attentes , les contrôles de qualité et en assurance.

- Une variable aléatoire discrète X suit **une loi de Poisson** si : $p(X=k)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$

  où λ est un paramètre positif. On écrit $X \sim P(\lambda)$.

Les propriétés de X sont :

- $E(X)=\lambda$
- $V(X)=\lambda$

Lois Discrètes Usuelles: Loi de Poisson

Exemple

Soit X le nombre des arrivées des clients à un guichet bancaire.

Supposons que X suit la loi de Poisson de paramètre 4.

Calculer les probabilités suivantes :

a) aucun client n'arrive au guichet,

b) plus de 2 clients arrivent au guichet,

c) entre 3 et 7 clients arrivent au guichet.

a)

$$p\{X=0\}=\frac{e^{-4}4^{0}}{0!}=e^{-4}=0{,}018$$

b)

$$p\{X \geq 3\} = 1 - p[X \leq 2]$$

$$= 1 - [p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2]]$$

$$= 0{,}762$$

c)

$$p\{3 \leq X \leq 7\} = p[X \leq 7] - p[X \leq 3]$$

$$= p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] + p[X = 7]$$

$$= 0{,}711$$

Lois Discrètes Usuelles: Loi binomiale négative

- Soient **E l'expérience de Bernoulli** et **A l'événement « succès »** de probabilité **p.**
  La probabilité $\bar{A}$ est égale à **q = 1- p**.

- On répète l'expérience E **n fois** dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.

- Soit X = « Nombre d'expériences E nécessaires pour obtenir **r fois** la réalisation de l'événement A ».

Lois Discrètes Usuelles: Loi binomiale négative

- L'événement (X = n) : « Réalisation de **n fois** l'expérience E pour obtenir **r fois** l'événement A» peut être subdivisé en deux événements complémentaires E et F .

- L'événement E : « Obtenir (r-1) réalisations de A lors des (k-1) premières expériences». En appliquant **la loi binomiale** on a :

  - $$p\left(E\right)=C_{n-1}^{r-1}\,p^{r-1}\cdot q^{n\text{-}r}$$

- L'événement F : « Obtenir l'événement A à **la k$^{\text{ème}}$ expérience** ». On a:

  - $$p\left(F\right)=p$$

Lois Discrètes Usuelles: Loi binomiale négative

On a : $P[X=n] = p(E \cap F)$

$$= p(E) \times p(F) = C_{n-1}^{r-1}\, p^{r-1}.q^{n-r} \times p$$

Donc : $P[X=n] = C_{n-1}^{r-1}\, p^{r}.q^{n-r}$

On écrit X $\rightarrow$ BN(n,p)

Remarque:

La variable aléatoire « Nombre des expériences nécessaires pour obtenir r fois la réalisation de A » est la somme de r variables indépendantes de **loi géométrique**.

i.e: $X = X_1 + X_2 + ... + X_r$

Lois Discrètes Usuelles: Loi binomiale négative

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = r \times \frac{1}{p}$
- $V(X) = r \times \frac{q}{p^2}$

Exemple:

Etant donné un stock de pièces qui contient 5% des pièces défectueuses. On prélève avec remise une pièce. Quelle est la probabilité dans les cas suivants:

- On fait 20 tirages pour obtenir 2 pièces non défectueuses
- On fait 15 tirages pour obtenir 3 pièces non défectueuses

Lois Discrètes Usuelles: Loi binomiale négative

Soit X le nombre de prélèvements nécessaires pour obtenir deux pièces non défectueuses. Alors on a:

- $P(X=20)=C_{19}^{1}\ (0.9)^{2}\times(0.1)^{18}$
- $P(X=15)=C_{14}^{2}\ (0.9)^{3}\times(0.1)^{12}$

Lois Discrètes Usuelles: Loi Hypergéométrique

- Soit une urne qui contient N boules composées de:
  - N_1 boules d'une couleurs donnée, (la couleur noire par exemple)
  - N_2 boules d'autres couleurs, (autre couleur que la noire).
- On fait n tirages sans remise à partir de cette urne.
- Soit X la variable aléatoire qui désigne «Le nombre de boules noires obtenues».
- X suit la loi Hypergéométrique de paramètres: N, n et $p = \frac{N_1}{N}$. Ainsi la probabilité de tirer k boules données est égale à:

$$p\left[X = k\right] = \frac{C_{N_1}^{k} . C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$$

On écrit X $\rightarrow$ H(N,n,p)

Lois Discrètes Usuelles: Loi Hypergéométrique

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = n\,p$
- $V(X) = \dfrac{N-n}{N-1}npq$

Exemple:

Soit une urne qui contient 2 boules blanche et 1 boule noire. On tire une boule 2 fois sans remise. La probabilité d'obtenir 2 boules blanches est égale à:

$$p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_1^0}{C_3^2} = \frac{1}{3}$$

Lois Discrètes Usuelles: Loi Multinomiale

- Soit E une expérience aléatoire qui peut avoir comme résultat l'un des événements $\mathbf{A_1, A_2,\dots, A_n}$ avec les probabilités respectives p_1, $\mathbf{p_2,\dots, p_n}$.

- On réalise n essais de l'expérience E d'une manière indépendante et dont les probabilités des événements restent invariantes d'une expérience à une autre.

- Soient X_1, $\mathbf{X_2,\dots, X_n}$ les nombres de réalisations des événements $\mathbf{A_1, A_2,\dots, A_n}$ tels que $\mathbf{X_1 + X_2+\dots+X_n} =$ n. Alors:

$$p\left(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k\right) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

Lois Discrètes Usuelles: Loi Multinomiale

Remarque:

La loi multinomiale est une généralisation où les expériences donnent plusieurs résultats.

Exemple :

On lance un dé 10 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- 6 fois une face inférieure ou égale à 3;
- 3fois une face supérieure ou égale à 3 et inférieure à 6 et;
- 1 fois le numéro 6.

- Soit A_1 = le numéro obtenu inférieur ou égal à 3.
- Soit A_2 = le numéro obtenu supérieur ou égal à 3 et inférieur à 6.
- Soit A_3 = le numéro obtenu est le numéro 6.

Lois Discrètes Usuelles: Loi Multinomiale

- Les événements A_1, A_2 et A_3 sont indépendants entre eux.

- Ainsi on a : $p(A_1) = \frac{3}{6}$, $p(A_2) = \frac{2}{6}$ et $p(A_3) = \frac{1}{6}$

  - Soit X_1 = le nombre de A_1 obtenus après les 10 lancers du dé.
  - Soit X_2 = le nombre de A_2 obtenus après les 10 lancers du dé.
  - Soit X_3 = le nombre de A_3 obtenus après les 10 lancers du dé.

- La probabilité d'avoir 6 fois A_1 et 3 fois A_2 et une fois A_3 est donnée par :

$$p(X_1 = 6, X_2 = 3, X_3 = 1) = \frac{10!}{6!3!1!}\left(\frac{3}{6}\right)^6\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1$$

Chapitre 4

Variables Aléatoires Continue

à une Seule Dimension

1. Définition

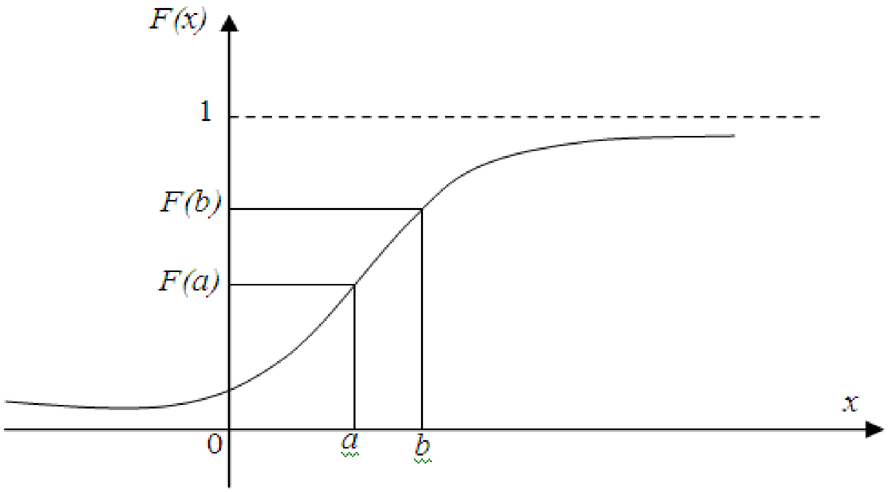
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F .

La variable X est dite continue s'il existe une fonction positive f telle que :

$$F(x)=\int_{-\alpha}^{x} f(t)\,dt \ ,\forall x \in \square \qquad (18)$$

La fonction f est appelé **densité de probabilité** de X.

F est une fonction positive, croissante, telle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)=1$

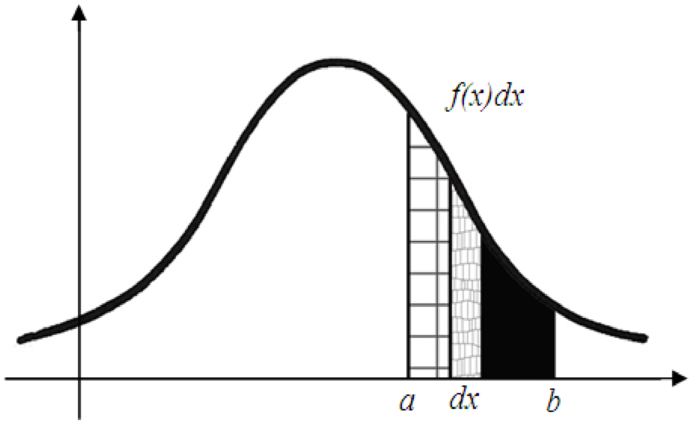


***Graphique 1 :** Courbe de la fonction de répartition*

Fonction de densité

La fonction de densité de probabilité de X vérifie les conditions suivantes :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$
- Si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$



Graphique 2 : *Courbe de densité*

Remarque : La fonction de densité de probabilité f est appelée aussi la loi de X.

Exemple 1:

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{si } 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1.Vérifier que f une fonction de densité de probabilité

2. Calculer la fonction de répartition

3. Représenter le graphique de f et de F

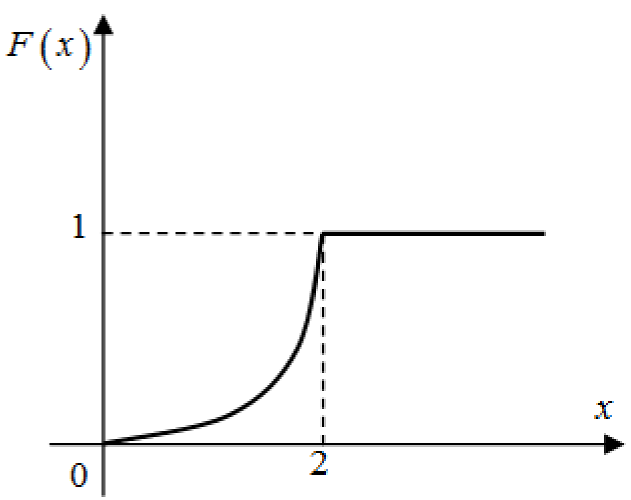
4. Calculer $P(0.5 \leq X \leq 0.7)$

5. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$ à l'aide de $M_X(t)$

Solution

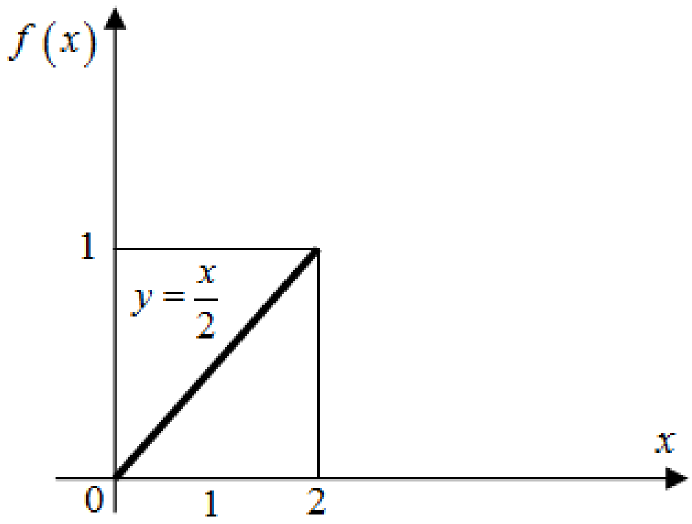
1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{2} dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx \quad = \int_{0}^{2} \frac{x}{2} dx = \left[\frac{1}{2} . \frac{x^2}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2} - 0\right] = 1.$$

2) $$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$



$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

3)



4)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

et $$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{16}{9}\right)$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9}$$

$$= \frac{18-16}{9} = \frac{2}{9}. \quad \Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

1. L’espérance mathématique

L’espérance mathématique ou l’espérance d’une variable aléatoire continue, notée $E(X)$, est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

2. La variance

La variance d’une variable aléatoire continue X, notée $V(X)$,est définie par :

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

où:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

Propriétés :

Soient a et b deux constantes ; X et Y deux variables aléatoires continues

- $E(a) = a$ et $V(a) = 0$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX+b) = a^2V(X)$

Exemple

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer E(X) et V(X)

Moments d'ordre supérieur à deux

➢ Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k, i.e:

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

➢ Le moment centré d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k, i.e:

$$m'_k = E(X - E(X))^k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^k f(x)dx$$

➢ Le moment d'ordre 1 : $m_1 = E(X)$

➢ Le moment d'ordre 2: $m_2 = E(X^2)$

$$\Rightarrow V(X) = m_2 - m_1^2$$

Fonction génératrice des moments

- La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X est la fonction :

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

- Sachant que : $$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!} = \frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \ldots$$

- Alors:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = E\left(\frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \ldots\right)$$

Moments d'ordre supérieur à deux

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^k\right) = \frac{t}{1!} E\left(X\right) + \frac{t^2}{2!} E\left(X^2\right) + \ldots + \frac{t^n}{n!} E\left(X^n\right) + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} m_k = \frac{t}{1!} m_1 + \frac{t^2}{2!} m_2 + \ldots + \frac{t^n}{n!} m_n + \ldots$$

d)

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx=\int_0^2 e^{tx}\frac{x}{2}dx \quad =\left[\frac{1}{t}e^{tx}.\frac{x}{2}\right]_0^2-\int_0^2\frac{1}{2t}e^{tx}dx$$

$$=\frac{1}{t}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{2t}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \quad =\frac{1}{t}e^{2t}-\frac{1}{2}\left[e^{tx}\right]_0^2$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{n!}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2t}{1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2^2.t^2}{2!}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{2^3.t^3}{6}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)+.....$$

Changement de variables

- Soit X est une variable aléatoire continue de fonction de densité f .
- Soit Y est une variable aléatoire continue de fonction de densité g qui est définie comme suit:

$$\square \longmapsto \square$$

$$h : X \rightarrow Y = h(X)$$

où h est une fonction strictement croissante ou décroissante sur D_X .

Donc on a:

$$g(y) = f(x)\left|h'(x)\right|^{-1} = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Avec :

- $x = h^{-1}(y)$
- $D_Y = h(D_X)$
- $y \in D_Y$

Exemple:

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie comme suit:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{16}x^2, -2\leq x\leq 2\\ 0\end{cases}$$

Donner la fonction de densité de Y = -3X+1

Comme le domaine de définition de X est [-2,2] alors le domaine de définition de Y est [-5,7]

Ainsi si Y = -3X+1 alors $\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{3}$. Donc pour $-5\leq y\leq 7$ on a:

$$g(y)=\frac{3}{16}\left(\frac{y-1}{3}\right)^2\left|-\frac{1}{3}\right| \Longrightarrow g(x)=\begin{cases}\frac{1}{144}(y-1)^2, -5\leq x\leq 7\\ 0\end{cases}$$

Lois Continues Usuelles: Loi Uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur un intervalle [a , b] si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si a} \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $X \sim U(a, b)$

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \dfrac{(a+b)}{2}$
- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exemple:

Soit une personne qui arrive à la gare de bus en sachant que ce dernier arrive à chaque 60 min. Cette personne n'aucune information ni sur l'heure du denier bus ni sur l'heure de la prochain bus. Il demande les gents de la gare le temps qu'il doit rester en attente du l'heure du prochain bus.

Calculer la probabilité pour cette personne reste en attente entre 15 et 30 min.

Soit X le temps d'attente en min de cette personne. On admet que $X \sim U(0,60)$. On a:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & \text{si } 0 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors:

$$P(15 \leq X \leq 30) = \int_{15}^{30} f(x)\,dx = \frac{1}{60}[x]_{15}^{30} = \frac{15}{60} = 0.25$$

3. La loi normale

La loi normale caractérise un phénomène résultant de l'additionnement de plusieurs facteurs qui sont indépendants.

Exemple : les cours d'une action dans une bourse

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ si sa fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

On écrit : $X \sim N(m,\sigma)$

2. Caractéristique de la loi normale

- Cas 1: $X \sim N(m,\sigma)$

$$F(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \le \frac{x-m}{\sigma}\right), \text{ avec } Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$= P\left(Y \le \frac{x-m}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

La valeur de ϕ est déterminée à partir de la table normale

$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$

2. Caractéristique de la loi normale

Si $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ alors Y est appelée la loi normale centrée réduite.

On écrit $Y \sim N(0,1)$

❑ <u>Cas 2:</u> $X \sim N(0,1)$

$$E(X)=0 \quad , \quad V(X)=1 \quad \text{et} \quad \phi(-x)=1-\phi(x)$$

95% des valeurs de la loi normale $N(0,1)$ sont concentrées dans l'intervalle

$$[m-36, m+36]$$

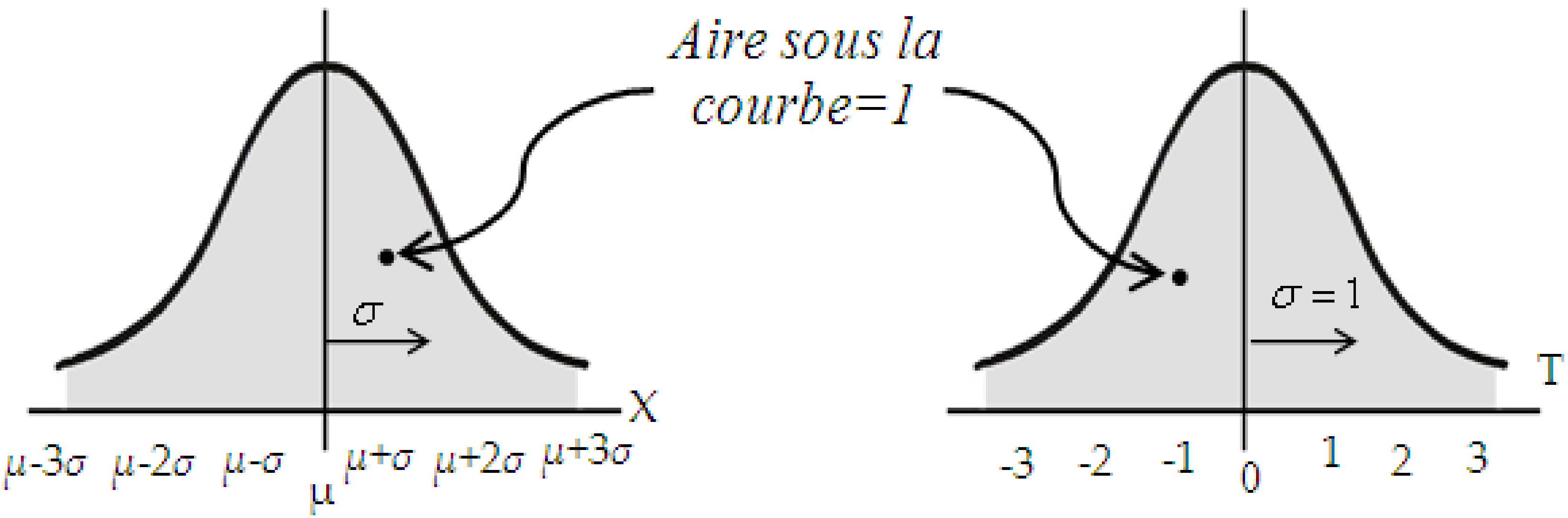
Lois Continues Usuelles: Loi Normale

Paramètres : $E(X) = \mu$

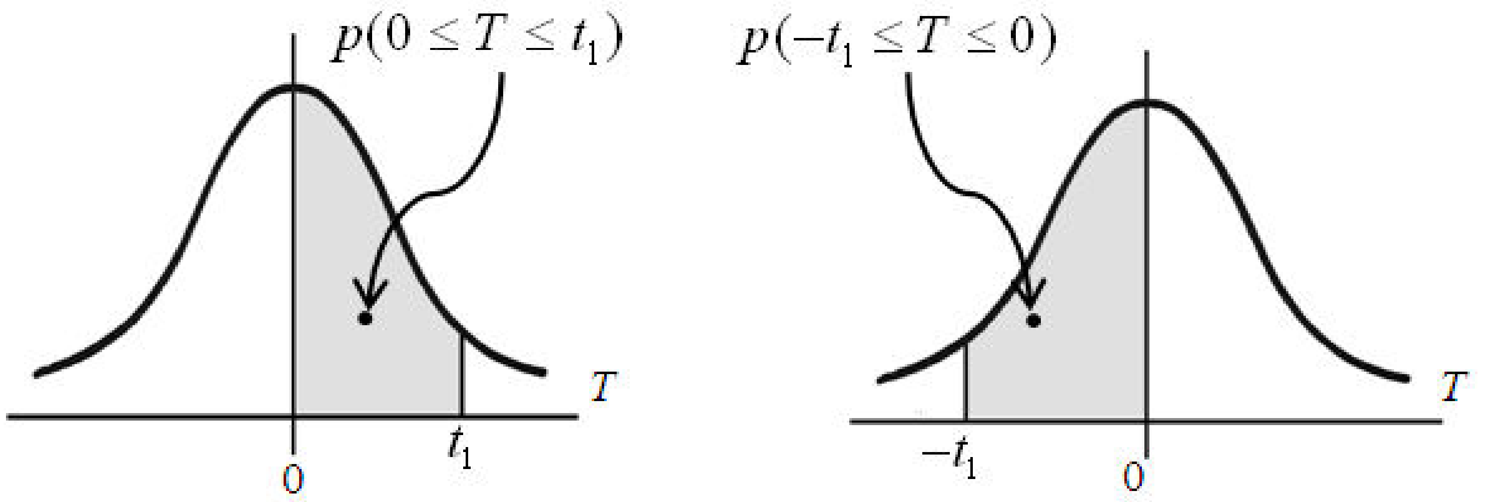
$Var(X) = \sigma^2$

Paramètres : $E(T) = 0$

$Var(T) = 1$

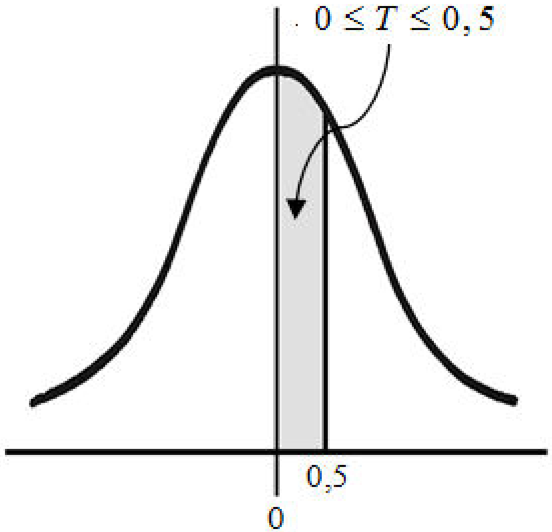


Calcul des probabilités avec la loi normale centrée réduite»



On a: $p(0 \le T \le t_1) = p(0 < T < t_1)$

Exemple: Calcul de $p(0 \le T \le 0,5)$ par l'utilisation de la table de la loi Normale



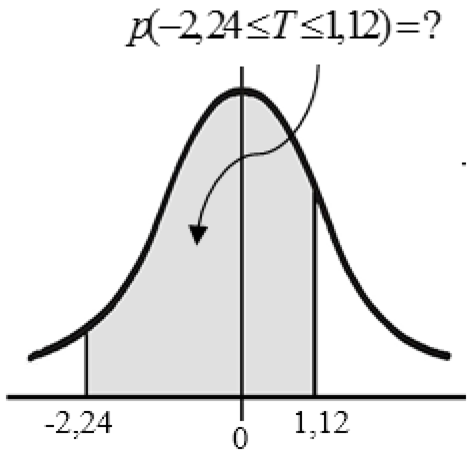
t	0,00	0,01	0,02
0	0.0000	0,0040	0,0080
0,1	0,0398	0,0438	0,0478
0,2	0,0793	0,0832	0,0871
0,3	0,1179	0,1217	0,1255
0,4	0,1554	0,1591	0,1628
0,5	0,1915	0,195	0,1985
0,6	0,2257	0,2291	0,2324
0,7	0,258	0,2611	0,2642
0,8	0,2881	0,291	0,2939
0,9	0,3159	0,3186	0,3212

- pour T=0,50 on lit directement de la table, 0,1915
- pour T=0,00 on lit directement de la table, 0,000

$$p(0 \le T \le 0,5) = p(0,5) - p(0) = 0,1915 - 0,000 = 0,1915$$

Lois Continues Usuelles: Loi Normale

Exemple de Calcul : Entre T= -2.24 et   T= 1.12



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264
1.0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4773
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4[illegible]38
2,2	0,4866	0,4864	0,486[illegible]	0,487[illegible]	0,4875

à T=1,12 correspond 0,3686

$$p(0 \le T \le 1,12) = 0,3686$$

à T=2,24 correspond 0,4875

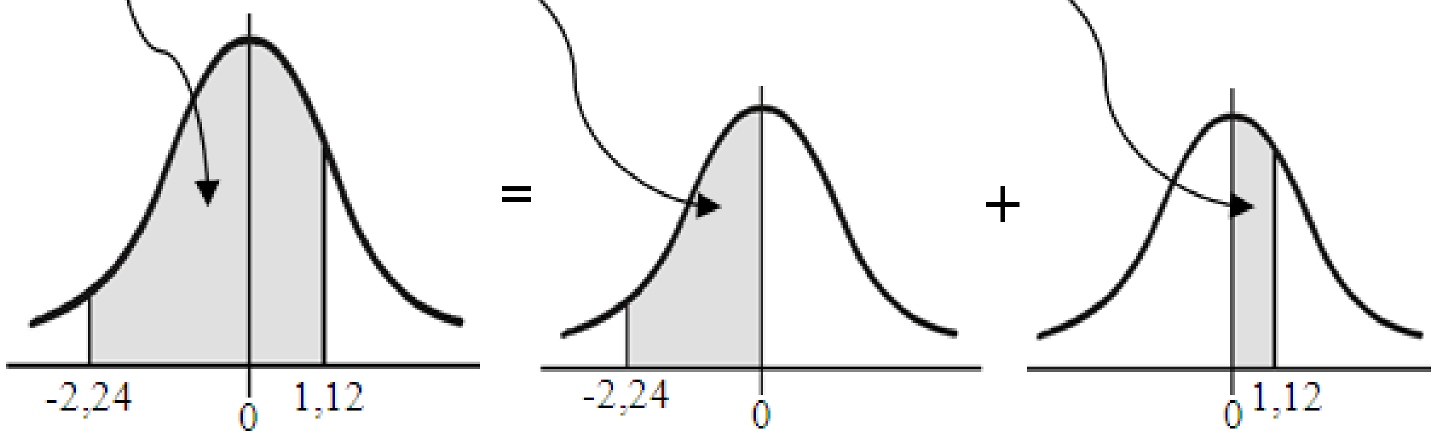
$$p(-2,24 \le T \le 0) = p(0 \le T \le 2,24) = 0,4875$$

Donc on aura :

$$p(-2,24 \leq T \leq 1,12) = p(-2,24 \leq T \leq 0) + p(0 \leq T \leq 1,12)$$

$$p(-2,24 \leq T \leq 1,12) = p(-2,24 \leq T \leq 0) + p(0 \leq T \leq 1,12)$$

$$= \quad 0,4875 \quad + \quad 0,3686 \quad = \quad 0,8561$$



Exercice

Soit X une variable aléatoire qui désigne le poids en Kg d'un type de Poisson.

On suppose que X suit la loi normale de fonction de densité définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{1}{18}(x-10)^2}$$

i/ Donner l'espérance et la variance de poids de ce type de poisson.

ii/ Donner la probabilité pour que le poids d'u poisson donné soit inférieur à 12 Kg

iii/ Sachant que le poids d'un type de poison donnée est supérieur à 8 Kg. Donner la probabilité pour que son poids soit inférieur à 12 Kg.

La loi Exponentielle est une loi qui est utilisée dans l'étude des phénomènes d'attente.

Elle est utilisé pour décrire l'intervalle de temps qui sépare deux évènements.

Par exemple :

- L'intervalle de temps séparant deux pannes consécution.
- Durée de vie d'une pièce.
- Intervalle de temps séparant deux arrivées consécutives à un guichet.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi Exponentielle de paramètre λ. Alors

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Exemple:

Soit X une variable aléatoire continue qui représente la durée de vie d'un système électronique. Supposons que la durée de vie moyenne est 400 heures.

i/ Quelle est la loi de X

ii/ Donner la fonction de répartition de X

iii/ Calculer $E(X)$ et $V(X)$

Relation entre la loi Exponentielle et la loi de Poisson

Lois Continues Usuelles: Loi de Khi-deux

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:
  - $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, n$
  - $Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j \,(i, j = 1, \ldots, n)$

- La variable aléatoire X définie par : $X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$

  Suit la loi de Khi-deux à n degré de liberté, on écrit $X \to \chi^2(n)$

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:

$$X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, n \qquad \text{et} \qquad Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j\,(i, j = 1, \ldots, n)$$

- Soit Y une variable aléatoires normale centrée réduite et indépendante de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. i.e:

$$Y \sim N(0,1) \qquad \text{et} \qquad Cov(Y, X_i) = 0, \forall i = 1, \ldots, n$$

- La variable aléatoire T définie par : $T = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{Z}{n}}}$ où $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$

suit la loi de Student à n dégrées de liberté. On écrit $T \to t_n$

Lois Continues Usuelles: Loi de Fisher

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ deux suites de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:

  - $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, n$ et $Y_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, m$
  - $Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j\,(i, j = 1, \ldots, n)$ et $Cov(Y_i, Y_j) = 0, \forall i \neq j\,(i, j = 1, \ldots, m)$

- La variable aléatoire F définie par:

$$F = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2} = \frac{\frac{1}{n}X}{\frac{1}{m}Y} \quad \text{où} \quad X \sim \chi_n^2 \quad \text{et} \quad Y \sim \chi_m^2$$

suit la loi de Fisher à n et m degrés de liberté. On écrit $F \rightarrow F_{n,m}$

Lois Continues Usuelles: Loi Log-Normale

Soit X une variable aléatoire continue. X suit la loi log-Normale de paramètres μ et σ si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \text{ si } x>0\\ 0, \text{ sinon}\end{cases}$$

On écrit $X \rightarrow LNor(\mu,\sigma)$

Les propriétés de X sont :

- $E(X)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$
- $V(X)=e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$

- La loi de Pareto est une loi qui ne prend des valeurs qu'au-delà d'un certain seuil pour des variables aléatoire. Cette loi est très employée en assurance.

- X une variable aléatoire qui suit la loi de Pareto de paramètres α et θ si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}, \text{ si } x\geq 0\\ 0, \text{ sinon}\end{cases}$$

Les propriétés de X sont :

- $E[X]=\dfrac{\theta\alpha}{\alpha-1}, si \quad \alpha\geq 1$
- $V[X]=\dfrac{\theta^2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)}, si \quad \alpha\succ 2$

On écrit $X\rightarrow Per(\alpha,\theta)$

Lois Continues Usuelles: Loi de Weibull

X une variable aléatoire qui suit la loi de Weibull de paramètres $\alpha, \beta \in R_{+}^{\text{å}}$ si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \beta\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les propriétés de X sont :

- $$E[X] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$$
- $$V[X] = \frac{1}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

On écrit $X \rightarrow Web(\alpha, \beta)$

Une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $\alpha, \beta \in R_{+}^{\text{å}}$ si elle possède une densité de probabilité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \; si \quad t > 0, \\ 0 \qquad\qquad\qquad si \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Les propriétés de X sont :

- $E[X] = \dfrac{\alpha}{\beta}$
- $V[X] = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

Lois Continues Usuelles: Loi de Bêta

Une variable aléatoire X est dite de loi Bêta de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ lorsque X prend ses valeurs dans l'intervalle [0,1] et admet la densité suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

- Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires qui sont indépendantes, de même moyenne et variance. i.e:

  - $E(X_i) = m, \forall i = 1, ..., n$
  - $V(X_i) = \sigma^2, \forall i = 1, ..., n$

Posons :

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On a:

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nm$
- $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2$

Alors:

$$Y_n = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{S}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$ Converge en loi vers une loi normale entrée réduite N(0,1). i.e:

$$Y_n \underbrace{\xrightarrow{\text{Converge en Loi}}}_{n \to +\infty} N(0,1)$$

Exemple:

Considérons 400 étudiants qui se sont présentées au guichet de la photocopie de la faculté pour faire des copies de cours sachant que chacun d'eux a payé à la caisse un montant $M_i \,(i = 1, \ldots, n)$. Supposons que les M_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi inconnue, de moyenne égale à 10 dh et de variance égale à 25 dh.

Donner la probabilité que la recette totale R du service de la photocopie soit supérieure à 4200 dh.

Théorème centrale limite

On a:

$$R = M_1 + M_2 + \ldots + M_{400} = \sum_{i=1}^{400} M(i)$$

Alors :

- $E(R) = 400m = 400 \times 10 = 4000$
- $V(R) = n\sigma^2 = 400 * (25)^2 = 10000$

D'après le théorème central limite on a : $\dfrac{R-nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{R-4000}{\sqrt{10000}} = \dfrac{R-4000}{10000} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow P(R > 4200) = P\left(\frac{R-4000}{100} > \frac{4200-4000}{100}\right)$$

$$= P(T > 2) = 1 - \phi(2) = 0.0288$$

Selon la table de loi normale centrée réduite où $T = \dfrac{R-4000}{100} \sim N(0,1)$

Approximation de loi Binomiale par la loi Normale

- Soit X une variable aléatoire suit la loi binomiale $B(n,p)$ avec n assez grand et p ni proche de 0 ni proche de 1. Alors la loi de X peut être approchée par une loi normale $N(m,\sigma^2)$, i.e :

$$X \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) \quad \text{où} \quad E[X] = m = np \quad \text{et} \quad V[X] = \sigma^2 = np(1-p)$$

- En pratique l'approximation est valable lorsqu'on a : $n \geq 20$, $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$

Exemple :

Etant donnée une entreprise qui a distribuée des produits de publicité à 1000 ménages. Sachant que la probabilité pour qu'un ménage ayant reçu le produit soit intéressé par celui-ci est égale à 0.45, quelle est la probabilité d'avoir parmi les 1000 ménages 470 ménages intéressées par le produit de publicité.

- Soit X le nombre de manages intéressés par le produit parmi les 1000 ménages.

  On a: $X \sim B(1000, 0.45)$

- La probabilité recherché est égale à : $P(X = 470)$

- Vue la difficulté du calcul de cette probabilité, on sera amené à utiliser l'approximation d'une loi binomiale par la loi normale.

- Or $p = 0.41$ ni proche de 0 ni proche de 1, $n = 1000 \geq 20$, $np = 1000 \times 0.45 = 450 \geq 10$ et $n(1-p) = 1000 \times 0.55 = 550 \geq 10$ alors :

$$X \sim N\left(np, \sqrt{npq}\right) = N\left(450, \sqrt{15.73}\right)$$

Donc $$P(X = 470) = \frac{1}{\sqrt{15.73}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{470-450}{\sqrt{15.73}}\right)^2} \simeq 0.01130$$

Approximation de loi de Poisson par la loi Normale

- Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de poisson de paramètre λ, i.e: $X \sim P(\lambda)$
- Lorsque $\lambda \geq 20$ X peut être approchée par une loi normale $N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$

Exemple

Etant donné une société dont le nombre de fois qu'elle en rupture de stock durant une année est une variable aléatoire qui suit la loi de poisson de paramètre 36. Quelle est la probabilité pour que le nombre de la société soit en rupture de stock durant une année soient inferieur à 39.

Approximation de loi de Poisson par la loi Normale

- Soit X le nombre de rupture de stock dans cette société durant une année. On a : $X \sim P(36)$

- La probabilité recherchée est : $P(X < 39) = \frac{e^{-36} \times 36^{0}}{0!} + \frac{e^{-36} \times 36^{1}}{1!} + \ldots + \frac{e^{-36} \times 36^{38}}{38!}$

$$= \mathrm{P}\left(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \ldots \cup \{X = 38\}\right)$$

- La difficulté du calcul, on préfère à passer à la loi normale, i.e: $X \sim N(36,6)$ alors :

$$P(X \leq 39) = \mathrm{P}\left(\frac{X - 36}{6} \leq \frac{39 - 36}{6}\right) = \mathrm{P}(T < 0.5) = 0.6915$$

où $T \sim N(0,1)$