



FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES, ÉCONOMIQUES
ET SOCIALES AIN SEBAÂ
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Mathématiques financières

Département SMAEG

Filière : LF SEG

2019-2020

Chapitre 1 :

Les intérêts simples

- ① Notion d'intérêt simple.
- ② L'escompte commercial.
- ③ Equivalence de capitaux à intérêts simples.

1. Notion d'intérêt simple

Intérêt

L'intérêt est le loyer de l'argent prêté ou placé pendant une certaine période. Il est déterminé en fonction d'un pourcentage (**taux d'intérêt**) appliqué sur le montant prêté ou placé (**capital**) et de la **durée** de mise à disposition de ce placement (ou prêt).

Notations :

- C : capital placé,
- τ : taux d'intérêt pour 100 Dh,
- n : nombre de périodes de placement (durée du placement),
- I : intérêt rapporté par le capital C .

Intérêt simple

Dans un placement à intérêt simple, Le taux d'intérêt est appliqué à un capital initial qui est **fixe** pendant toute la durée du prêt. Cela signifie qu'on replace le **même capital** à la fin de chaque période jusqu'à la fin de la durée du placement.

Soit C un capital placé au taux d'intérêt τ pendant n années,

- au bout de la première année l'intérêt est de : $\frac{C \times \tau}{100}$

- au bout de la deuxième année l'intérêt est de :

$$\frac{C \times \tau}{100} + \frac{C \times \tau}{100} = \frac{C \times \tau \times 2}{100}$$

- au bout de la $n^{\text{ième}}$ année l'intérêt est de :

$$\underbrace{\frac{C \times \tau}{100} + \frac{C \times \tau}{100} + \dots + \frac{C \times \tau}{100}}_{n \text{ fois}} = \frac{C \times \tau \times n}{100}$$

Ainsi, on a la formule :

$$I = \frac{C \times \tau \times n}{100}$$

Valeur acquise

La valeur acquise est la somme disponible à la fin du placement :

$$V_a = C + I$$

Exemples :

- ① Soit un capital de 10000 Dh placé pendant 2 ans à intérêts simples à 5 %. Alors :

$$I = \frac{C \times \tau \times n}{100} = \frac{10000 \times 5 \times 2}{100} = 1000 \text{ Dh.}$$

et la valeur acquise est :

$$V_a = 10000 + 1000 = 11000 \text{ Dh.}$$

- ② Un capital de 3500 Dh est placé pendant 5 ans au taux de 7,5 %. Alors :

$$I = \frac{C \times \tau \times n}{100} = \frac{3500 \times 7,5 \times 5}{100} = 1312,5 \text{ Dh} \quad ; \quad V_a = 4812,5 \text{ Dh.}$$

Remarques :

- L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an).
- Dans la formule précédente, n désigne la durée du placement en nombre d'années. Si la durée de placement est exprimée en jours ou en mois, alors on doit tenir compte des règles suivantes :
 - ▶ L'année financière (commerciale) est de 360 jours.
 - ▶ Si la durée est calculée en jours, les mois sont comptés à leur juste valeur (janvier : 31 jours ; avril : 30 jours ; ...).
 - ▶ On ne compte pas le premier jour et on compte le dernier.
 - ▶ Sans autre indication, le mois de février compte 28 jours.

Taux proportionnels

Définition

Deux taux sont dits proportionnels s'ils sont proportionnels à leur durée de placement.

Si on désigne par τ_a le taux annuel, alors les taux proportionnels correspondants sont donnés par le tableau ci-dessous :

Taux semestriel	Taux trimestriel	Taux mensuel	Taux journalier
$\tau_s = \tau_a/2$	$\tau_t = \tau_a/4$	$\tau_m = \tau_a/12$	$\tau_j = \tau_a/360$

Remarque :

A intérêts simples, des taux proportionnels produisent le même intérêt (et donc la même valeur acquise).

Exemples :

- ❶ Soit un capital de 6400 Dh placé à intérêts simples pendant 10 mois à 12 %. Alors :

$$I = \frac{C \times \tau \times (n/12)}{100} = \frac{C \times \tau \times n}{1200} = \frac{6400 \times 12 \times 10}{1200} = 640 \text{ Dh.}$$

- ❷ Quel est l'intérêt produit à intérêts simples, par un placement d'une somme de 5200 au taux de 5 % pendant 72 jours ?

$$I = \frac{C \times \tau \times (n/360)}{100} = \frac{C \times \tau \times n}{36000} = \frac{5200 \times 5 \times 72}{36000} = 52 \text{ Dh.}$$

- ❸ On place un capital de 7200 Dh à intérêts simples du 4 novembre au 8 février de l'année suivante, au taux annuel de 10 %. Calculer l'intérêt produit par ce placement, ainsi que la valeur acquise.

On a : $C = 7200 \text{ Dh}$, $\tau = 10\%$. Calculons le nombre de jours n :

Novembre :	du 4 au 30 (30 - 4)	26 j
Décembre :	31 jours	31 j
Janvier :	31 jours	31 j
Février :	8 jours (jusqu'au 8)	8 j
Nombre total de jours :		96 j

Ainsi, on obtient :

$$I = \frac{C \times \tau \times n}{36000} = \frac{7200 \times 10 \times 96}{36000} = 192 \text{ Dh.}$$

et

$$V_a = 7200 + 192 = 7392 \text{ Dh.}$$

2. L'escompte commercial

Définitions

- Un **effet de commerce** est un document par lequel un débiteur s'engage à payer une somme à une date fixée appelée **échéance** de l'effet. La somme à payer à l'échéance est la **valeur nominale** de l'effet.
Les effets de commerce sont constitués par des traites, des billets à ordre, des lettres de change, des chèques, ...
- Le bénéficiaire de l'effet de commerce peut le négocier avant l'échéance auprès d'une banque sous déduction d'intérêt. Cette opération s'appelle **escompte commercial**.
- **L'escompte** est l'intérêt calculé sur la valeur nominale de l'effet en fonction de la **durée** écoulée du jour de la négociation au jour de l'échéance (ou **nombre de jours à courir** de l'effet).

Formule de l'escompte

- V_n : valeur nominale de l'effet,
- τ : le taux de l'escompte,
- n : durée de l'escompte en jours (nombre de jours à courir),
- E : montant de l'escompte

$$E = \frac{V_n \times \tau \times n}{36000}$$

- V_a : valeur actuelle (valeur escomptée n jours avant l'échéance)

$$V_a = V_n - E = V_n \left(1 - \frac{\tau \times n}{36000} \right)$$

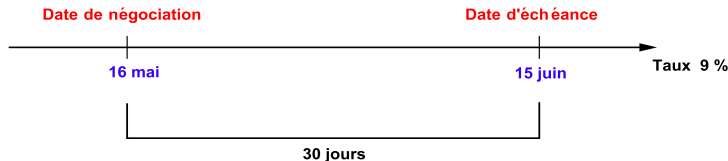


Remarque :

La durée de l'escompte est égale au nombre de jours compris entre celui de la remise (exclu) et celui de l'échéance (inclus). La pratique bancaire conduit souvent à y ajouter un certain nombre de jours (**jours de banque**).

Exemple :

Un effet de valeur nominale 82000 *Dh* est négocié le 16 mai et sa date d'échéance est le 15 juin de la même année. La banque escompte cet effet à un taux de 9 %. Calculons le montant de l'escompte :



$$E = \frac{V_n \times \tau \times n}{36000} = \frac{82000 \times 9 \times 30}{36000} = 615 \text{ Dh}$$

et la valeur actuelle est : $V_a = V_n - E = 82000 - 615 = 81385 \text{ Dh}$.

L'agio

Dans la pratique, la remise d'un effet à l'escompte entraîne des frais financiers, en plus de l'escompte proprement dit. Ces frais sont constitués de la façon suivante :

- l'escompte,
- diverses commissions,
- la taxe sur la valeur ajoutée (TVA),
- Tenir compte d'un jour de banque.

L'ensemble de l'escompte et des commissions s'appelle l'**agio** :

$$\text{Agio} = \text{Escompte} + \text{Commissions} + \text{TVA}$$

La **valeur nette**, notée V_{nt} , d'un effet est la somme effectivement mise à la disposition du détenteur de l'effet lors de sa négociation. Elle est donnée par

$$V_{nt} = V_n - \text{l'agio}$$

Exemple

Un effet de valeur nominale 40000 *Dh*, échéant le 30 novembre, est remis à l'escompte le 5 octobre de la même année aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte : 12 %,
- Commissions de manipulation par effet : 10 *Dh*,
- Tenir compte d'un jour de banque,
- Taux de TVA : 10 %.

(du 5 octobre au 30 novembre) + 1 jour de banque

$$\begin{aligned}
 \text{Nombre de jours (n)} &= \overbrace{56 + 1}^{= 57} \\
 \text{Escompte}(E) &= \frac{40000 \times 12 \times 57}{36000} = 760 \text{ Dh} \\
 \text{commissions de manipulation} &= 10 \text{ Dh} \\
 \text{Total H.T} &= 770 \text{ Dh} \\
 \text{T.V.A} &= 770 \times 10 \% = 77 \text{ Dh} \\
 \text{Agio} &= \text{Total H.T} + \text{T.V.A} = 847 \text{ Dh}
 \end{aligned}$$

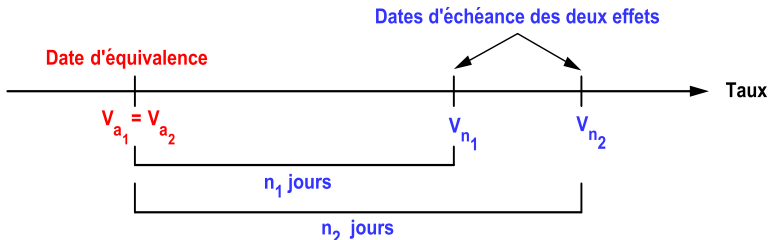
et la valeur nette est $V_{nt} = 40000 - 847 = 39153 \text{ Dh}$.

3. Equivalence de capitaux à intérêts simples

3.1 Equivalence de deux effets

Définition

Deux effets (ou deux capitaux) sont **équivalents** à une date donnée, appelée **date d'équivalence** si, escomptés au même taux, ils ont à cette date la même valeur actuelle.



Si nous désignons par :

- n_1 et n_2 : les durées d'escompte en jours des deux effets,
- V_{n_1} et V_{n_2} : les valeurs nominales,
- τ : le taux annuel d'escompte,
- V_{a_1} et V_{a_2} : les valeurs actuelles à la date d'équivalence,

alors, d'après la formule de l'escompte, on a :

$$V_{a_1} = V_{a_2} \iff V_{n_1} - \frac{V_{n_1} \times \tau \times n_1}{36000} = V_{n_2} - \frac{V_{n_2} \times \tau \times n_2}{36000}$$

Exemple :

Un créancier et son débiteur se mettent d'accord, le 2 mars, pour remplacer un effet de 90000 *Dh* arrivant à échéance le 22 mars par un autre échéant le 22 avril de la même année. Le taux d'escompte est de 10 %. Calculons la valeur nominale de l'effet de remplacement.



On a :

$$V_{a1} = V_{a2} \implies 90000 - \frac{90000 \times 10 \times 20}{36000} = V_{n2} - \frac{V_{n2} \times 10 \times 51}{36000}$$

$$\implies 89500 = V_{n2} \left(1 - \frac{10 \times 51}{36000} \right)$$

D'où : $V_{n2} = 90786,14 \text{ Dh}$.

Remarque :

A intérêts simples, la date d'équivalence est unique : si deux effets de valeurs nominales différentes sont équivalents à une date donnée, l'équivalence ne peut avoir lieu qu'à cette date.

3.2 Equivalence de plusieurs effets ; L'échéance commune

Définition

Un effet est équivalent à une date donnée (date d'équivalence), à un ensemble d'effets si, à cette date, sa valeur actuelle est la somme des valeurs actuelles des autres effets.

L'échéance commune est la date d'échéance (ou le nombre de jours à courir) de l'effet unique équivalent à l'ensemble d'effets.

$$V_a = \sum_{i=1}^k V_{a_i} \iff V_n - \frac{V_n \times \tau \times n}{36000} = \sum_{i=1}^k \left(V_{n_i} - \frac{V_{n_i} \times \tau \times n_i}{36000} \right)$$

où :

- V_{n_i} ($i = 1, \dots, k$) : valeurs nominales des effets remplacés,
- n_i : durées d'escompte en jours,
- V_{a_i} : valeurs actuelles à la date d'équivalence,
- τ : taux de l'escompte,
- n, V_n, V_a : échéance, valeurs nominale et actuelle de l'effet unique.

Exemple :

Un commerçant remplace les trois effets ci-dessous :

- 5500 *Dh* échéant dans 45 jours,
- 7000 *Dh* échéant dans 87 jours,
- 12000 *Dh* échéant dans 104 jours,

par un effet ayant 42 jours à courir. Calculons la valeur nominale de cet effet avec un taux de 11 %.

$$\begin{aligned} V_n - \frac{V_n \times 11 \times 42}{36000} &= \left(5500 - \frac{5500 \times 11 \times 45}{36000} \right) \\ &\quad + \left(7000 - \frac{7000 \times 11 \times 87}{36000} \right) \\ &\quad + \left(12000 - \frac{12000 \times 11 \times 104}{36000} \right) \\ V_n \left(1 - \frac{11 \times 42}{36000} \right) &= 23856,96 \implies V_n = 24167,11 \text{ Dh.} \end{aligned}$$

Chapitre 2 :

Les intérêts composés

- ① Définition et formule de l'intérêt composé.
- ② Exemples.
- ③ Taux équivalents.
- ④ Capitalisation avec nombre fractionnaire de périodes.
- ⑤ Equivalence de capitaux à intérêts composés.

1. Définition et formule de l'intérêt composé

Définition

Un capital est placé à intérêts composés si, à la fin de chaque période, l'intérêt produit est ajouté au capital pour produire lui aussi un intérêt à la période suivante.

Exemple :

Un capital de 5000 Dh est placé à intérêts composés au taux annuel de 4 % pendant 3 ans.

Période (an)	Capital (Dh)	Intérêts Produits (Dh)	Valeur acquise (Dh)
1	5000	$5000 \times 4\% = 200$	$5000 + 200 = 5200$
2	5200	$5200 \times 4\% = 208$	$5200 + 208 = 5408$
3	5408	$5408 \times 4\% = 216,32$	$5408 + 216,32 = 5624,32$

Conclusion : après 3 ans de placement, la valeur acquise est **5624,32 Dh**.

Formule générale :

Soient : C le capital initial placé, τ le taux d'intérêt pour un dirham et n la durée du placement (en nombre d'années).

Alors, en posant $C_0 = C$:

- Fin de la première année :

l'intérêt est : $C_0 \times \tau$

le nouveau capital est : $C_1 = C_0 + (C_0 \times \tau) = C_0(1 + \tau)$

- Fin de la deuxième année :

l'intérêt est : $C_1 \times \tau$

le nouveau capital est : $C_2 = C_1 + (C_1 \times \tau) = C_1(1 + \tau) = C_0(1 + \tau)^2$

- Fin de la $n^{\text{ième}}$ année :

l'intérêt est : $C_{n-1} \times \tau$

le nouveau capital est :

$$C_n = C_{n-1} + (C_{n-1} \times \tau) = C_{n-1}(1 + \tau) = C_0(1 + \tau)^n$$

D'une année à l'autre, le capital est multiplié par $(1 + \tau)$. La suite (C_n) est donc une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $1 + \tau$.

La valeur acquise étant par définition le capital après n périodes, on a :

$$V_a = C_n = C_0(1 + \tau)^n$$

En conclusion, on a la formule :

$$V_a = C(1 + \tau)^n \quad (1)$$

avec les notations suivantes :

- C : capital initial placé,
- τ : taux d'intérêt pour un dirham,
- n : durée du placement,
- V_a : valeur acquise après n périodes de placement.

Dans l'exemple précédent, on a : $C = 5000$ Dh, $\tau = 4\% = 0,04$, $1 + \tau = 1,04$ et $n = 3$. En appliquant directement la formule (1), on obtient :

$$V_a = C(1 + \tau)^n = 5000(1,04)^3 = 5624,32 \text{ Dh}$$

2. Exemples

2.1 Recherche de la valeur acquise ; n nombre d'années :

Soit un capital de 16000 Dh placé à intérêts composés au taux de 5 % pendant 6 ans. Calculer la valeur acquise.

On a : $C = 16000$ Dh ; $\tau = 5\%$; $n = 6$ ans.

Alors, $1 + \tau = 1 + 0,05 = 1,05$. D'où :

$$V_a = C(1 + \tau)^n = 16000(1,05)^6 = 21441,53 \text{ Dh}$$

2.2 Recherche de la valeur acquise ; n nombre de semestres :

Quelle est au bout de 5 semestres, la valeur acquise par un capital de 10000 Dh placé à intérêts composés au taux semestriel de 3,5 % ?

$C = 10000$ Dh ; $\tau = 3,5\%$; $n = 5$ semestres.

$$V_a = C(1 + \tau)^n = 10000(1,035)^5 = 11876,86 \text{ Dh}$$

2.3 Recherche du taux de placement :

A quel taux faut-il placer un capital de 8620 Dh pendant 5 ans pour obtenir une valeur acquise de 10487 Dh ?

On cherche τ sachant que :

$C = 8620$ Dh, $n = 5$ ans et $V_a = 10487$ Dh.

La formule (1) donne :

$$(1 + \tau)^n = \frac{V_a}{C}$$

D'où :

$$1 + \tau = \left(\frac{V_a}{C} \right)^{\frac{1}{n}}$$

On obtient alors :

$$\tau = \left(\frac{V_a}{C} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{10487}{8620} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0,04 = 4\%$$

2.4 Calcul de la durée de placement :

Au bout de combien d'années un capital de 500 Dh placé au taux annuel de 8,50 % acquiert-il une valeur de 751.83 Dh?

On cherche n sachant que

$$C = 500 \text{ Dh}, \quad V_a = 751.83 \text{ Dh} \quad \text{et} \quad \tau = 8.50 \%$$

Compte tenu de la relation (1), on a :

$$V_a = C \times (1 + \tau)^n \quad \Rightarrow \quad \frac{V_a}{C} = (1 + \tau)^n$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{V_a}{C}\right) = n \times \log(1 + \tau) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\log\left(\frac{V_a}{C}\right)}{\log(1 + \tau)}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(1.50366)}{\log(1.085)} = 5.$$

3. Taux équivalents

Nous avons déjà vu que dans le cas d'intérêts simples, des taux proportionnels donnent la même valeur acquise.

Ce résultat n'est plus valable lorsqu'il s'agit d'intérêts composés.

En effet, considérons l'exemple suivant :

Un capital de 120000 Dh est placé à intérêts composés au **taux semestriel** de 6 %. Sa valeur acquise au bout de 4 ans est :

$$\begin{aligned} V_a &= 120000 \times (1.06)^8 \quad (4 \text{ ans} = 8 \text{ semestres}) \\ &= 191261,77 \text{ Dh} \end{aligned}$$

Si on utilise maintenant le taux annuel proportionnel $\tau_a = 12 \%$ on obtient :

$$V_a = 120000 \times (1.12)^4 = 120000 \times 1.573519 = 188822.3 \text{ Dh}$$

On remarque que les deux valeurs acquises **ne sont pas égales**.

On conclut que deux taux proportionnels ne produisent pas la même valeur acquise pour les intérêts composés. On est alors amené à définir la notion de taux équivalents.

Définition

Deux taux sont dits **équivalents** s'ils aboutissent pour un même capital, à la même valeur acquise pendant la même durée de placement.

$$C(1 + \tau_1)^{n_1} = C(1 + \tau_2)^{n_2}$$

$$(1 + \tau_1)^{n_1} = (1 + \tau_2)^{n_2}$$

$$\tau_1 = (1 + \tau_2)^{n_2/n_1} - 1$$

$$\text{ou bien } \tau_2 = (1 + \tau_1)^{n_1/n_2} - 1$$

Exemples :

- ❶ Le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10 % est

$$\tau_s = (1 + 0.1)^{1/2} - 1 = (1.1)^{1/2} - 1 = 0.0488088 \text{ soit } \tau_s = 4,88 \%$$

- ❷ Le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 10 % est

$$\tau_t = (1 + 0.1)^{1/4} - 1 = (1.1)^{1/4} - 1 = 0.024113689 \text{ soit } \tau_t = 2,41 \%$$

- ❸ Le taux mensuel équivalent au taux semestriel de 7 % est

$$\tau_m = (1.07)^{1/6} - 1 = 0.0113402601 \text{ soit } \tau_m = 1,13 \%$$

- ❹ Revenons à l'exemple introductif du paragraphe 3 :

$C = 120000$ Dh, $\tau_s = 6 \%$. Le taux annuel équivalent à τ_s est :

$$\tau_a = (1 + \tau_s)^2 - 1 = (1,06)^2 - 1 = 0,1236 = 12,36 \%$$

$$\text{D'où : } V_a = C(1 + \tau_a)^4 = 120000(1,1236)^4 = 19261,77 \text{ Dh.}$$

Ainsi, on retrouve la même valeur acquise déjà calculée avec le taux semestriel.

4. Capitalisation avec un nombre fractionnaire de périodes

Remarque

Dans la formule (1) et les exemples précédents, la durée du placement n utilisée est en nombre d'années, de semestres, trimestres,....

La question qui se pose maintenant est : comment procéder si la durée est n années et m mois (par exemple 8 ans et 5 mois) ?

Définition

On dit que le temps de placement ou de capitalisation est un nombre **fractionnaire** si la durée de placement s'exprime en n ans et m mois, avec $1 \leq m \leq 11$.

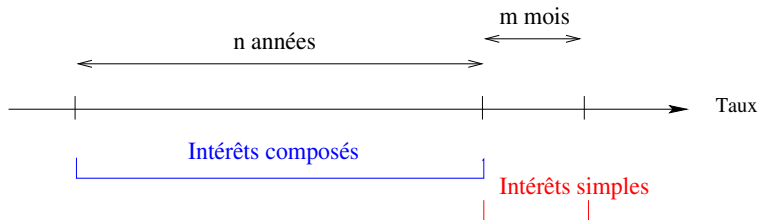
Exemple :

Calculer la valeur acquise par un capital de 100 000 Dh placé pendant **8 ans et 5 mois** au **taux annuel de 6 %**.

Pour résoudre ce problème, deux solutions sont possibles :

① Solution rationnelle :

On considère les n années à **intérêts composés** et les m mois à **intérêts simples**.



$$\begin{aligned}
 V_{an+m/12} &= V_{an} + (V_{an} \times \tau \times m/12) \\
 &= C \times (1 + \tau)^n + (C \times (1 + \tau)^n) \times \tau \times m/12
 \end{aligned}$$

C étant le capital placé, après n années d'intérêts composés, on obtient la valeur acquise : $V_{an} = C \times (1 + \tau)^n$

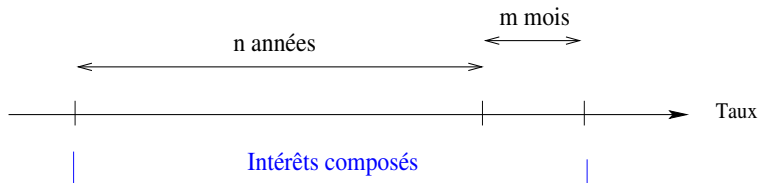
On applique ensuite les intérêts simples à V_{an} pour les m mois restants :

$$V_{an+m/12} = C \times (1 + \tau)^n + C \times (1 + \tau)^n \times \tau \times m/12$$

Reprenons l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} V_{8+5/12} &= \underbrace{100000 \times (1.06)^8}_{\text{intérêt composé}} + \underbrace{(100000 \times (1.06)^8) \times 0.06 \times 5/12}_{\text{intérêt simple}} \\ &= 100000 \times (1.06)^8 \times (1 + 0.06 \times 5/12) \\ &= 100000 \times 1.593848 \times 1.024999 \\ &= 163369.42 \text{ Dh} \end{aligned}$$

- ② **Solution commerciale** : Dans la pratique, on considère que la totalité de la durée du placement s'effectue à **intérêts composés**.



$$V_{a_{n+m/12}} = C \times (1 + \tau)^{n+m/12}$$

Reprenons l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} V_{8+5/12} &= 100000 \times (1.06)^{8+5/12} = 100000 \times (1.06)^8 \times (1.06)^{5/12} \\ &= 100000 \times 1.593848 \times 1.02458 \\ &= 163302,5 \text{ Dh} \end{aligned}$$

Valeur actuelle

Définition

La valeur actuelle d'un capital C_n est la somme C_0 qui, placée actuellement à intérêts composés au taux périodique τ , donnerait la valeur C_n après n périodes de placement.

$$C_n = C_0(1 + \tau)^n \Rightarrow C_0 = C_n(1 + \tau)^{-n}$$

Exemple :

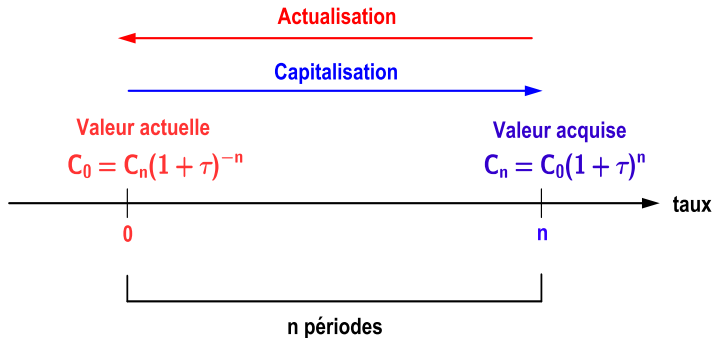
Un capital placé au taux mensuel de 1,2 % aura au bout de 8 mois une valeur acquise de 5000 Dh. Quelle est sa valeur actuelle ?

$$C_0 = C_n(1 + \tau)^{-n} = 5000(1,012)^{-8} = 4544,92 \text{ Dh}$$

Remarque :

La définition précédente concerne l'**actualisation** : on connaît la valeur future (valeur acquise C_n) d'un capital après une certaine durée de placement et on cherche sa valeur présente C_0 (valeur actuelle).

La **capitalisation** contrairement à l'actualisation, consiste à chercher la valeur future (valeur acquise) du capital, connaissant sa valeur actuelle.

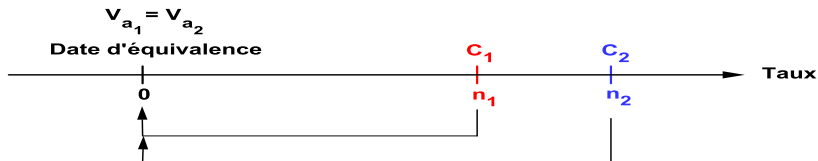


5. Equivalence de capitaux à intérêts composés

5.1 Equivalence de deux capitaux :

Définition

Deux effets (ou capitaux) sont **équivalents** à intérêts composés, à une date donnée (**date d'équivalence**), si escomptés à intérêts composés et au même taux, ils ont à cette date la **même** valeur actuelle.

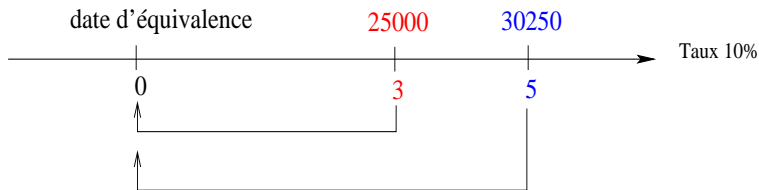


taux par période τ . Alors C_1 et C_2 sont équivalents ssi $V_{a_1} = V_{a_2}$ ssi

$$C_1(1 + \tau)^{-n_1} = C_2(1 + \tau)^{-n_2}$$

Exemple :

Soit un capital de 25000 Dh payable dans 3 ans et un capital de 30250 Dh payable dans 5 ans. Taux d'escompte 10%.



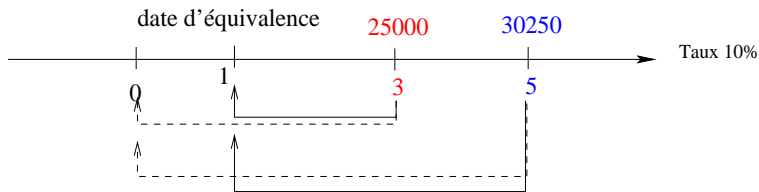
1^{er} capital : Valeur actuelle à la date d'équivalence est

$$25000(1 + \tau)^{-3} = 25000(1.1)^{-3} = 25000 \times 0.751315 = 18782.87 \text{ Dh}$$

2^{ème} capital : Valeur actuelle à la date d'équivalence est

$$30250(1 + \tau)^{-5} = 30250(1.1)^{-5} = 30250 \times 0.620921 = 18782.87 \text{ Dh.}$$

Choisissons une autre date d'équivalence :



1^{er} capital : Valeur actuelle à la date d'équivalence est

$$25000(1 + \tau)^{-2} = 25000(1.1)^{-2} = 25000 \times 0.826446 = 206161.15 \text{ Dh}$$

2^{ème} capital : Valeur actuelle à la date d'équivalence est

$$30250(1 + \tau)^{-4} = 30250(1.1)^{-4} = 30250 \times 0.683013 = 20661.15 \text{ Dh.}$$

Remarque

Si deux capitaux sont équivalents à intérêts composés, à **une date donnée**, ils sont équivalents à **toute autre date**.

5.2 Equivalence de plusieurs capitaux :

Définition

Un capital C est équivalent à intérêts composés, à une date donnée, à un ensemble de plusieurs capitaux C_i si la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelle des autres capitaux.

$$C(1 + \tau)^{-n} = \sum_{i=1}^k C_i(1 + \tau)^{-n_i}.$$

Exemple 1 : recherche de la durée

Déterminer l'échéance d'une dette de 4983.245 Dh destinée à remplacer les 3 dettes suivantes :

- 1000 Dh payable dans 6 mois
- 1800 Dh payable dans 18 mois
- 2000 Dh payable dans 30 mois

On applique une capitalisation semestrielle avec taux semestriel de 6%.

Soit n le nombre de périodes (semestres), on a :

$$\begin{aligned} 4983.245(1 + \tau)^{-n} &= 1000(1 + \tau)^{-1} + 1800(1 + \tau)^{-3} + 2000(1 + \tau)^{-5} \\ &= 1000(1.06)^{-1} + 1800(1.06)^{-3} + 2000(1.06)^{-5} \\ &= 3949.227 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1.06)^{-n} = 0.792 \Rightarrow n = 4$$

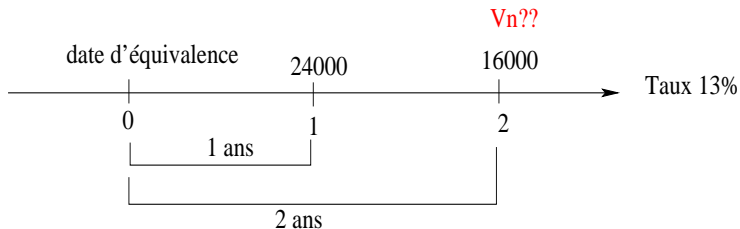
Soit 4 semestres (2 ans).

Exemple 2 : recherche de la valeur nominale

Un débiteur souhaite se libérer, par un paiement unique dans 2 ans, des dettes suivantes :

- 24000 Dh payable dans un an,
- 16000 Dh payable dans 2 ans.

Quelle est la valeur de ce paiement unique si le taux d'intérêts composés est de 13 % ?



$$V_n \times (1.13)^{-2} = 24000 \times (1.13)^{-1} + 16000 \times (1.13)^{-2}$$

$$\Rightarrow V_n = (24000 \times 1.13) + 16000 = 43120 \text{ Dh}$$

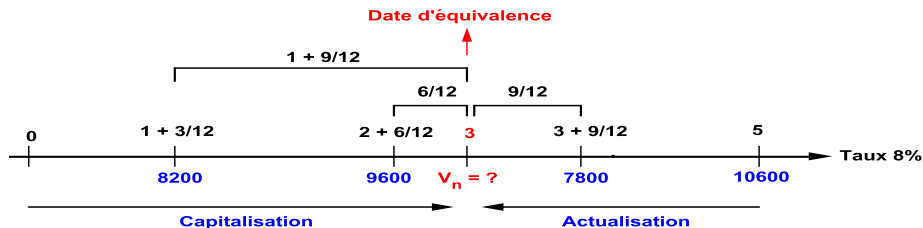
Exemple 3 : recherche de la valeur nominale

Un débiteur a contracté 4 dettes auprès du même créancier :

- 8200 Dh payable dans 1 an et 3 mois,
- 9600 Dh payable dans 2 ans et 6 mois,
- 7800 Dh payable dans 3 ans et 9 mois,
- 10600 Dh payable dans 5 ans

Préférant se libérer en une seule fois, il obtient de son créancier la facilité de s'acquitter par un paiement unique dans 3 ans.

Calculons le montant de ce paiement, compte tenu d'un taux annuel de 8 %.



$$\begin{aligned}
 V_n &= 8200(1.08)^{3-(1+3/12)} + 9600(1.08)^{3-(2+6/12)} + \\
 &\quad 7800(1.08)^{-9/12} + 10600(1.08)^{-2} \\
 &= 8200(1.08)^{1+9/12} + 9600(1.08)^{6/12} + \\
 &\quad 7800(1.08)^{-9/12} + 10600(1.08)^{-2} \\
 &= (8200 \times 1.144172) + (9600 \times 1.03923) + \\
 &\quad (7800 \times 0.943913) + (10600 \times 0.857338) \\
 &= 35809.12 \text{ Dh.}
 \end{aligned}$$