

Chapitre 1 : Calcul matriciel

1.1 Les matrices

1.1.1 Notion de matrice

◆ Définition 1.1 (Matrice)

- Une **matrice** réelle A est un tableau rectangulaire de nombres réels.
- Elle est dite de **taille** $m \times n$ si le tableau possède m lignes et n colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A .
- Le coefficient situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté a_{ij} .
- Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ou encore $A = (a_{ij})$.

- L'ensemble des **matrices réelles** est noté de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

◆ Exemple 1.1

Considérons les tableaux suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les tableaux A , B et C sont des matrices de type 2×3 , 3×4 et 3×2 respectifs.

1.1.2 Matrices particulières

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle de type $m \times n$ ($A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$).

- ❶ Si $m = n$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice A est dite **matrice carrée d'ordre n** . On note $M_n(\mathbb{R})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

- ❷ Si la matrice A n'a qu'une seule ligne ($m = 1$), elle est appelée **matrice ligne** ou **vecteur ligne**. On la note

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$$

- ❸ Si la matrice A n'a qu'une seule colonne ($n = 1$), elle est appelée **matrice colonne** ou **vecteur colonne**. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

- 4 Si tous les coefficients de la matrice A sont des **zéros**, elle est appelée la **matrice nulle** et est notée $0_{m,n}$ ou plus simplement 0 .
- 5 La matrice carrée d'ordre n dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et les autres éléments sont nuls est appelée **matrice unité** ou **matrice identité d'ordre n** . On la note

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

- ⑥ On dit que A est **triangulaire inférieure** si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit : $i < j \implies a_{ij} = 0$.

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- ⑦ On dit que A est **triangulaire supérieure** si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit : $i > j \implies a_{ij} = 0$.

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.2 Opérations sur les matrices

◆ Proposition 1.1 (Somme de deux matrices)

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $m \times n$. Leur **somme** $C = A + B$ est la matrice de taille $m \times n$ définie par

$$C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

◆ Exemple 1.2

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

On obtient

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+5 & 3+1 \\ 4+2 & 2+0 & 1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

◆ Remarque 1.1

La somme de deux matrices de taille différentes n'est pas définie.

◆ Proposition 1.2 (Multiplication d'une matrice par un scalaire)

Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ est la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par α . Elle est notée

$$\alpha \cdot A = \alpha A = (\alpha a_{ij})$$

◆ Exemple 1.3

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\alpha = 5$, on obtient

$$5A = \begin{pmatrix} 5 \times 2 & 5 \times 5 \\ 5 \times 3 & 5 \times 6 \\ 5 \times 1 & 5 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 15 & 30 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$$

◆ Proposition 1.3 (Produit de deux matrices)

Si $A = (a_{ik})$ une matrice $m \times p$ et si $B = (b_{kj})$ une matrice $p \times n$, alors le produit $C = AB$ est une matrice $m \times n$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Pour obtenir le terme c_{ij} de la matrice produit AB , on multiplie terme à terme les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par ceux de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

◆ Exemple 1.4

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◆ Exemple 1.5

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{-3} \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 \\ \boxed{0} & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c_{11} = 2 \times 1 + 0 \times 0 + (-3) \times 2 = -4$$

◆ Exemple 1.6

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 3 \\ 2 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c_{12} = 2 \times 2 + 0 \times 2 + (-3) \times 1 = 1$$

◆ Exemple 1.7

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{-3} \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{4} \\ 0 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c_{13} = 2 \times 4 + 0 \times 3 + (-3) \times 0 = 8$$

◆ Exemple 1.8

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 \\ \boxed{0} & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c_{21} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times 2 = 5$$

◆ Exemple 1.9

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 3 \\ 2 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 5 & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c_{22} = 1 \times 2 + (-1) \times 2 + 2 \times 1 = 2$$

◆ Exemple 1.10

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{4} \\ 0 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c_{23} = 1 \times 4 + (-1) \times 3 + 0 \times 1 = 1$$

◆ Exemple 1.11

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◆ Exemple 1.12

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3 , la matrice B est d'ordre 3×3 donc $A \times B$ est d'ordre 2×3 .
- On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◆ Remarque 1.2

Le produit $B \times A$ est impossible.

◆ Propriétés 1.1

Le produit matriciel est

① **associatif** :

$$A(BC) = (AB)C$$

② **distributif par rapport à la somme** :

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{et} \quad (B + C)A = BA + CA$$

③ **non commutatif** : $AB \neq BA$

1.3 Matrice transposée

◆ Définition 1.2 (Transposée d'une matrice)

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On appelle **matrice transposée** de A la matrice A^t de taille $n \times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

◆ Exemple 1.13

Soit la matrice A d'ordre 2×3 suivante $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, sa matrice transposée est la matrice A^t d'ordre 3×2 suivante $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

◆ Propriétés 1.2

- ① Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ alors $(A^t)^t = A$.
- ② Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ alors $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
- ③ Si $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ alors $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- ④ Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ alors $(AB)^t = B^t A^t$.

◆ Définition 1.3 (Matrice symétrique, matrice antisymétrique)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que

- ① A est **symétrique** si $A^t = A$.
- ② A est **antisymétrique** si $A^t = -A$.

◆ Exemples 1.14

- ① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, on a $A^t = A$ donc A est symétrique.
- ② $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & 7 \\ 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$, on a $B^t = -B$ donc B est antisymétrique.

1.4 Matrice inverse

1.4.1 Définition et propriétés

◆ Définition 1.4 (Matrice inversible, matrice singulière)

- ① Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **inversible** ou **régulière** s'il existe une matrice carrée $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

On appelle B la **matrice inverse** de A et on la note $B = A^{-1}$.

- ② Une matrice non régulière est dite **singulière**.

◆ Propriétés 1.3

Soient A et B deux matrices **inversibles** de même ordre, alors :

- ① A^{-1} est **inversible** et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ② A^t est **inversible** et $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- ③ AB est **inversible** et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.4.2 Déterminant d'une matrice

◆ Définition 1.5 (Mineur)

On appelle **mineur** de l'élément a_{ij} de la matrice A , la sous matrice M_{ij} obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j de la matrice A .

◆ Exemple 1.15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \text{ on a } M_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

◆ Définition 1.6 (Déterminant)

Le déterminant de la matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est le réel :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0j} \det(M_{i_0j}) \quad (\text{on fixe la ligne } i_0)$$

ou

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(M_{ij_0}) \quad (\text{on fixe la colonne } j_0)$$

◆ Exemples 1.16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

❶ $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 5 \times 2 = -7$

❷ En fixant la ligne 1, on obtient

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11} \det(M_{11}) - b_{12} \det(M_{12}) + b_{13} \det(M_{13}) \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-3) - 2 \times (-4) + 3 \times 4 \\ &= 17 \end{aligned}$$

❸ En fixant la colonne 1, on obtient

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11} \det(M_{11}) - b_{21} \det(M_{21}) + b_{31} \det(M_{31}) \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-3) - 0 \times (-2) + 4 \times 5 \\ &= 17 \end{aligned}$$

◆ Remarques 1.3

- ❶ Pour le calcul du déterminant, on choisit la ligne ou la colonne qui contient le plus grand nombre de zéros.
- ❷ Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes (ajout à une colonne - resp. une ligne - une combinaison linéaire des autres colonnes - resp. lignes) d'une matrice ne modifient pas la valeur du déterminant.

◆ Propriétés 1.4

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, on a

- ❶ $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- ❷ $\det(\lambda A) = \lambda^n \times \det(A)$.
- ❸ $\det(A^t) = \det(A)$.
- ❹ A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- ❺ si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

1.4.3 Calcul de la matrice inverse

◆ Proposition 1.4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible ($\det(A) \neq 0$). La matrice inverse de A est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^t$$

où $\text{Com}(A)$ est la **comatrice** de A définie par

$$\text{Com}(A) = \left((-1)^{i+j} \det(M_{ij}) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

◆ Exemple 1.17

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $\det(A) = 4 \neq 0$, donc A est inversible.

$$\begin{aligned} \text{On a aussi, } Com(A) &= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (Com(A))^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1.4.4 Application

Résoudre le système linéaire

$$(S) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

Le système (S) s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c-à-d } (S) \Leftrightarrow AX = b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où la solution du système } (S) \text{ est } X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.5 Rang d'une matrice

◆ Définition 1.7

Le **rang** d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est la taille du plus grand déterminant non nul que l'on peut extraire de A . On le note $\text{rang}(A)$.

◆ Propriétés 1.5

Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$

- ① $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$.
- ② $\text{rang}(B) = n \Leftrightarrow B$ inversible.

♦ Exemples 1.18

$$① \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$② \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \det(B) = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(B) = 2$$

$$③ \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Chapitre 2 : Système d'équations linéaires

2.1 Définition

◆ Définition 2.1

Un système de m équations linéaires à n inconnues peut être écrit sous la forme suivante :

$$(SL) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

où les **inconnues** sont les scalaires $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et où les données sont :

- Les **coefficients** $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Les **seconds membres** $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$.

◆ Exemples 2.1

$$(SL1) \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 14 \end{cases}$$

$$(SL2) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 7 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$$

$$(SL3) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 - 6x_3 = -22 \\ 8x_1 - x_2 - 3x_3 = 10 \end{cases}$$

◆ Remarque 2.1

Les trois cas suivants sont possibles pour n'importe quel système (SL) :

- Le système **n'a pas de solution**.
- Le système a **une solution unique** ($\exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ qui vérifie les m équations du système).
- Le système a **une infinité de solutions**.

◆ Interprétation matricielle

Le système d'équations linéaires (SL) peut aussi s'écrire sous la forme matricielle :

$$Ax = b,$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2.2 Système de Cramer

◆ Définition 2.2

Un système de m équations linéaires à n inconnues, est dit de **Cramer** s'il possède autant d'équations que d'inconnues ($m = n$) et si la matrice A est **inversible**.

◆ Théorème 2.1

Un système de Cramer admet une solution unique .

◆ Proposition 2.1 (Formules de Cramer)

L'unique solution (x_1, \dots, x_n) d'un système de Cramer d'équation matricielle $AX = b$ sont :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(A)} \quad \forall i \in 1, 2, \dots, n$$

où C_1, C_2, \dots, C_n désignent les colonnes de la matrice A .

◆ Exemple 2.2

Résoudre le système linéaire (S_1)
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$$

avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 55 \neq 0$$

Alors le système (S_1) est un système de Cramer d'où le système admet une solution unique

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}; \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}; \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

avec

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -55; \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 165;$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 10 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 110. \quad \text{D'où} \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 2.$$

◆ Exemple 2.3

Résoudre le système linéaire (S_2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Alors le système (S_2) est un système de Cramer, d'où le système admet une solution unique

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}; \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}; \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

avec

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

D'où $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -2$.

2.3 Système triangulaire supérieur

◆ Définition 2.3

Un système linéaire (SL) à m équations et n inconnues est dit **système triangulaire supérieur** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.

◆ Exemple 2.4

$$(SL1) \begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & & & 6x_3 & = & 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(SL2) \begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ & & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 15 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(SL3) \begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ & & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 15 \\ & & & & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Examinons les deux systèmes linéaires ci-dessous :

$$(A) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 101 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 134 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 40 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 49 & (L1) \\ 4x_2 + 2x_3 = 30 & (L2) \\ 7x_3 = 21 & (L3) \end{cases}$$

Le système (A) n'est pas très simple à résoudre car les 3 inconnues sont présentes dans les 3 équations.

Le système (B) est très simple à résoudre :

(L3) donne : $x_3 = 3$.

Puis dans (L2) : $4x_2 + 6 = 30$ donc $x_2 = (30 - 6)/4 = 6$.

Enfin dans (L1) : $2x_1 + 30 + 9 = 49$ donc $x_1 = (49 - 30 - 9)/2 = 5$.

Conclusion : pour résoudre le système (A), on le transforme en un système triangulaire supérieur équivalent comme le système (B).

2.4 Méthode du Pivot de Gauss

◆ Définition 2.4

On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents si ils ont la même solution.

◆ Définition 2.5

Les trois modifications suivantes d'un système linéaire sont appelées opération élémentaire sur les lignes :

Nature de l'opération	Codage
Permutation de 2 lignes	$L_i \longleftrightarrow L_j$
Multiplication de L_i par un scalaire non nul	$L_i \longleftarrow \lambda L_i$
Addition à L_i du produit de L_j par un scalaire	$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$

◆ Théorème 2.2

Les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

◆ Méthode du Pivot de Gauss

La méthode du pivot permet d'associer à tout système linéaire un système triangulaire supérieur équivalent.

◆ Algorithme général

Soit un système linéaire à résoudre

$$(SL) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

- **Étape 1** : On se ramène à un système équivalent tel que $a_{11} \neq 0$ en changeant éventuellement l'ordre des inconnues ou en permutant deux lignes.
- **Étape 2** : Pour chaque $i \neq 1$, on utilise l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1$ de façon à éliminer l'inconnue x_1 de chacune des lignes autres que la première. On dit que l'on a utilisé a_{11} comme pivot.

On obtient le système :

$$(SL) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a'_{2,2}x_2 + \dots + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\ a'_{3,2}x_2 + \dots + a'_{3,n}x_n = b'_3 \\ \vdots \\ a'_{m,2}x_2 + \dots + a'_{m,n}x_n = b'_m \end{cases}$$

- **Étape 3** : On réitère ces deux opérations de l'étape 1 et 2 sur le système à $n - 1$ inconnues formé par les $m - 1$ dernières lignes. Et ainsi de suite.

◆ Algorithme général

Au bout d'un nombre fini d'opérations. On obtient un système équivalent de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a''_{1,1}x_1 & + & a''_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a''_{1,r}x_r & + & \dots & + & a''_{1,n}x_n & = & b''_1 \\ & & a''_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a''_{2,r}x_r & + & \dots & + & a''_{2,n}x_n & = & b''_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & a''_{r,r}x_r & + & \dots & + & a''_{r,n}x_n & = & b''_r \\ & & & & & & & & & & 0 & = & b''_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & & & & & 0 & = & b''_m \end{array} \right.$$

avec $a''_{ii} \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

- L'entier $r \leq \min(m, n)$ est appelé le rang du système linéaire.
- Les équations $0 = b''_j$ ($r < j \leq m$) sont appelées les **conditions de compatibilité** du système. (Il y a $m - r$ conditions de compatibilité)
- Les inconnues x_1, x_2, \dots, x_r sont appelées les **inconnues principales**.
- Les inconnues $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ sont appelées les **inconnues secondaires**.

◆ Algorithme général

Deux cas peuvent se produire :

- ❶ S'il existe $k \in [r + 1, m]$ tel que $b_k'' \neq 0$, alors le système n'a pas de solution (système incompatible).

$$S = \{\emptyset\}$$

- ❷ Si on n'a pas des conditions de compatibilité où pour tout $k \in [r + 1, m]$ tel que $b_k'' = 0$, alors le système est compatible ($S \neq \emptyset$) : il existe au moins une solution (c'est un vecteur de \mathbb{R}^n) qui dépend de $n - r$ paramètres.

- ▶ Si $r = n$, cette solution est unique.

Alors la ligne L_n donne $a_{nn}x_n = b_n$, c'est-à-dire $x_n = b_n/a_{nn}$. En suite en remplaçant dans la ligne L_i , on a

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j), \quad \forall i = n - 1, \dots, 1.$$

- ▶ Si $r < n$, on a une infinité de solutions.

on exprime alors les r premières inconnues (les **inconnues principales**) en fonction de $n - r$ dernière inconnues (les **inconnues secondaires**), puis le résoudre comme dans le cas $r = n$. On obtient alors une infinité de solutions.

◆ Exemple 2.5

Résoudre le système (S1)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 & L_1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 & L_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 8 & L_3 \end{cases}$$

On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

D'où

$$(S1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 4x_3 = -3 \\ -2x_3 = -1 \end{cases}$$

On n'a pas des conditions de compatibilité, alors le système est compatible. Il y a au moins une solution ; et on a $r = 3$ ($r = n$). Alors la solution est unique :

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_2 = -3 + 4x_3 = -1 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, \frac{1}{2})\}$$

◆ Exemple 2.6

Résoudre le système (S2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 & L_1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 2 & L_2 \\ -3x_1 - 5x_2 + 12x_3 - x_4 = 16 & L_3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -5 & 5 & 2 \\ -3 & -5 & 12 & -1 & 16 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

D'où

$$(S2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

On n'a pas des conditions de compatibilité, alors le système est compatible. Il y a au moins une solution; et on a $r = 3$ ($r < n = 4$). Donc, il y a une infinité de solutions qui dépend de $n - r = 1$ paramètre :

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = \frac{15}{2}x_4 - \frac{43}{2} \\ x_2 = 8 - x_3 - 3x_4 = -\frac{17}{2}x_4 - \frac{17}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2}(x_4 - 1) \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{15}{2}x_4 - \frac{43}{2}, -\frac{17}{2}x_4 - \frac{17}{2}, \frac{1}{2}(x_4 - 1), x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

◆ Exemple 2.7

$$\text{Résoudre le système (S3)} \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 & L_1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 20x_3 = m & L_2 \\ -x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 6 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 2 \\ 4 & -2 & 20 & | & m \\ -1 & 8 & 7 & | & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 10 & 16 & | & m+8 \\ 0 & 5 & 8 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + 4L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 10 & 16 & | & m+8 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{m}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{matrix}$$

On a deux cas :

- Si $m \neq 0$, le système est incompatible et $S = \emptyset$.
- Si $m = 0$, on a $r = 2$ et $n = 3$ ($r < n$), alors le système est compatible. Il y a au moins une solution qui dépend de $n - r = 1$ paramètre. Il y a donc une infinité de solutions.

$$(S3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 10x_2 + 16x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_3 + 2 \\ x_2 = \frac{4}{5} - \frac{8}{5}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} - \frac{37}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{4}{5} - \frac{8}{5}x_3 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{5} - \frac{37}{5}x_3, \frac{4}{5} - \frac{8}{5}x_3, x_3 \right), x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

2.5 Calcul de la matrice inverse

La méthode du pivot de Gauss peut être utilisée pour inverser une matrice.

On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence par présenter les choses sous la forme "Gauss".

$$\left(A \mid I_3 \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Au lieu de mettre à droite de la matrice A le seul vecteur b comme pour les systèmes linéaires de la section précédente, on a mis cette fois, la matrice d'identité (dont on cherche les antécédents).

Premièrement : On effectue la méthode du pivot de Gauss pour obtenir une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

$$\begin{aligned}
 (A \mid I_3) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{4}L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

Deuxièmement : On effectue la méthode du pivot de Gauss « inverse », de manière à obtenir la matrice identité.

$$\begin{aligned}
 (A \mid I_3) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 - 2L_3 \\ L_2 + L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) L_1 - L_2 \\
 &\Leftrightarrow (I_3 \mid A^{-1})
 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3 : Diagonalisation d'une matrice

3.1 Motivation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on veut calculer A^m , $m \in \mathbb{N}$.

- Si A est diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a alors $A^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$
- Si A est non diagonale, mais semblable à une matrice diagonale D (dans ce cas on dit que A est diagonalisable) : $A = PDP^{-1}$, on a :

$$A^m = \underbrace{PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \cdots \times PDP^{-1}}_{m \text{ fois}} = PD^m P^{-1}.$$

Le calcul de D^m est facile puisque la matrice D est diagonale.

3.2 Valeurs et vecteurs propres

◆ Définition 3.1 (Valeurs et vecteurs propres)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} .

- On appelle **valeur propre** de A tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe une matrice-colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que

$$AX = \lambda X.$$

- La matrice-colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelée **vecteur propre** de A associé à λ et le couple (λ, X) se nomme **élément propre** de A .
- On appelle **spectre** de A le sous-ensemble de \mathbb{R} constitué de toutes les valeurs propres de A . On le note $\text{Sp}(A)$.

◆ Exemple 3.1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3X.$$

3 valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

◆ Remarques 3.1

- La condition qu'un vecteur propre soit non nul est impérative.
- Une valeur propre peut être nulle.
- Une valeur propre (par exemple 0) peut être associée à plusieurs vecteurs propres.
- A un vecteur propre n'est associé qu'une seule valeur propre.

◆ Définition 3.2 (Polynôme caractéristique)

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur \mathbb{R} .

On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme à coefficients dans \mathbb{R} , de degré n , noté P_A , défini par

$$\forall X \in \mathbb{R} \quad P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

◆ Remarque 3.2

Trouver les valeurs propres d'une matrice peut se ramener à un simple calcul de déterminant et à une recherche de racine du polynôme caractéristique.

On a le résultat suivant :

◆ Proposition 3.1

λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de $P_A(X)$.

◆ Exemple 3.2

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminons le spectre de A .

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X+2)^2$$

Les valeurs propres de A sont les deux réels 1 et -2 . On écrit :

$$\text{Sp}(A) = \{1, -2\}.$$

3.3 Sous-espace propre d'une matrice

Quand on a déterminé les valeurs propres d'une matrice A , on cherche pour chaque valeur propre λ les vecteurs propres associés en résolvant l'équation

$$(A - \lambda I_n)X = 0.$$

Il s'agit donc de déterminer le sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ .

◆ Définition 3.3 (Noyau d'une matrice)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On appelle **noyau** de A :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathbb{R}^n / AX = 0\}$$

◆ Définition 3.4 (Sous-espace propre)

On appelle **sous-espace propre** de A associé à λ , et on note E_λ , le sous-espace de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$E_\lambda = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

◆ Exemple 3.3

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 est valeur propre de A .

Déterminons E_3 .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3 = \text{Ker}(A - 3I_2) \Leftrightarrow (A - 3I_2)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = x.$$

$$\text{Donc } E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / y = x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Se pose maintenant la question de la dimension du sous-espace propre E_λ .

◆ Définition 3.5 (Ordre de multiplicité)

Soit A une matrice carrée.

Si λ est une racine de multiplicité $m(\lambda)$ du polynôme caractéristique de A alors on dit que λ est une valeur propre de multiplicité $m(\lambda)$ de A .

- Si $m(\lambda) = 1$ alors la valeur propre λ est dite simple.
- Si $m(\lambda) > 1$ alors la valeur propre λ est dite multiple.
- Elle est dite double lorsque $m(\lambda) = 2$ et triple lorsque $m(\lambda) = 3$.

◆ Exemple 3.4

$$P_A(X) = (X + 2)^3(2 - X)^2, Sp(A) = \{-2, 2\}.$$

- -2 est valeur propre de multiplicité 3 ($m(-2) = 3$).
- 2 est valeur propre de multiplicité 2 ($m(2) = 2$).

◆ Proposition 3.2

Soient λ une valeur propre de A et E_λ son sous-espace propre et $m(\lambda)$ son ordre de multiplicité. Alors

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m(\lambda).$$

En particulier, si λ est une valeur propre simple de A alors $\dim E_\lambda = 1$.

◆ Remarque 3.3

Dans le cas d'une valeur propre simple, c'est immédiat car le sous-espace propre associé est de dimension égale à 1. En revanche, dans le cas d'une valeur propre λ de multiplicité multiple (≥ 2), la dimension du sous espace propre E_λ s'obtient à partir de la relation

$$\dim E_\lambda = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$$

◆ Exemple 3.5

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(X) = (1 - X)(X + 2)^2 \text{ et } \text{Sp}(A) = \{1, -2\}$$

Déterminons les dimensions des sous espaces propres E_1 et E_{-2} .

- $m(1) = 1 \Rightarrow 1 \leq \dim E_1 \leq 1 \Rightarrow \dim E_1 = 1$
- $m(-2) = 2 \Rightarrow 1 \leq \dim E_{-2} \leq 2 \Rightarrow \dim E_{-2} = 1 \text{ ou } \dim E_{-2} = 2$

On remarque que la matrice $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et que son rang vaut 1.

Donc

$$\dim E_{-2} = 3 - \text{rg}(A - \lambda I_n) = 3 - 1 = 2$$

3.4 Diagonalisation

◆ Définition 3.6 (Diagonalisabilité d'une matrice)

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P d'ordre n sur \mathbb{R} , et s'il existe une matrice diagonale D d'ordre n sur \mathbb{R} , telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

Diagonaliser A , c'est trouver D .

◆ Définition 3.7

Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est dit **scindé** sur \mathbb{R} s'il peut s'écrire comme produit de polynômes du premier degré de $\mathbb{R}[X]$.

◆ Exemple 3.6

- $P(X) = (X - 3)(X + 1)^2 = (X - 3)(X + 1)(X + 1)$ est scindé sur \mathbb{R} .
- $P(X) = (X - 1)(X^2 + 4)$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} .

◆ Proposition 3.3 (Critère de diagonalisation)

Une matrice A est diagonalisable **si et seulement si**

- ① Son polynôme caractéristique est **scindé**,
- ② Pour chaque valeur propre λ de multiplicité $m(\lambda)$, on a $m(\lambda) = \dim E_\lambda$.

◆ Cas particulier.

Si le polynôme caractéristique a n racines distinctes deux à deux alors A est diagonalisable.

◆ Proposition 3.4

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Étapes à suivre pour diagonaliser une matrice A

❶ Étude de la diagonalisabilité de f .

- ▶ On détermine le polynôme caractéristique de A , c'est-à-dire

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines de P_A . Ce sont les valeurs propres de A .

- ▶ Si P_A n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable.
- ▶ Si P_A est scindé, on compare $\dim E_{\lambda_i}$ et $m(\lambda_i)$ pour chaque valeur propre λ_i .

À ce stade, on n'a pas besoin de déterminer le sous-espace propre E_{λ_i} . On remarquera que

$$\dim E_{\lambda_i} = n - \operatorname{rg}(A - \lambda_i I_n).$$

La matrice A est diagonalisable si le critère de diagonalisation (proposition 3.3) est vérifié.

2 Diagonalisation de A lorsque c'est possible.

- Pour chaque valeur propre λ_i , on détermine une base du sous-espace propre E_{λ_i} en résolvant l'équation

$$(A - \lambda_i I_n)X = 0.$$

Notons $\mathcal{B}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,d_i})$ la base de E_{λ_i} , où d_i est la dimension de E_{λ_i} .

- La matrice A est donc semblable à une matrice diagonale $D : A = PDP^{-1}$.
Sur la diagonale de D , il y a (dans cet ordre) : d_1 fois la valeur λ_1 , puis d_i fois la valeur λ_i , ..., et d_p fois la valeur λ_p .

$$D = \text{diag} \left(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_i, \dots, \lambda_i}_{d_i \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{d_p \text{ fois}} \right)$$

et

$$P = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,d_1} & \dots & u_{i,1} & \dots & u_{i,d_i} & \dots & u_{p,1} & \dots & u_{p,d_p} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

◆ Exemple 3.7

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

❶ **Le polynôme caractéristique est :**

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -2-X & 3 & -3 \\ 0 & 1-X & -1 \\ 0 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= -(2+X)(X-2)^2 \end{aligned}$$

$P_A(X)$ est scindé et $\text{Sp}(A) = \{-2, 2\}$ avec $m(-2) = 1 = \dim(E_{-2})$ et $m(2) = 2$. On en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2) = 2 = m(2)$.

2 Déterminons $\dim E_2$.

On a

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - 2I_3) = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ donc } \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 2,$$
$$\text{et } \dim E_2 = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 1 \neq m(2).$$

Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

◆ Exemple 3.8

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

❶ **Le polynôme caractéristique de A est**

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & -1 \\ 1 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(1-X)$$

$P_A(X)$ est scindé et $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A) = \{2, 1\}$ avec $m(1) = 1 = \dim(E_1)$ et $m(2) = 2$.

On en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2) = 2 = m(2)$.

2 Déterminons le sous-espace propre de E_2 .

Soit $X = (x, y, z)^T \in E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$. On a

$$(A - 2I_3)X = 0 \implies \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y + z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} = \langle u_2, u_3 \rangle \text{ avec } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\dim(E_2) = 2 = m(2)$, et par conséquent A est diagonalisable.

③ Déterminons le sous-espace propre de E_1 .

Soit $X = (x, y, z)^T \in E_1 = \text{Ker}(A - I_3)$. On a

$$(A - I_3)X = 0 \implies \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = x \\ z = x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \langle u_1 \rangle \text{ où } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ Conclusion

A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

3.5 Application aux systèmes récurrents linéaires

Une application classique est la résolution des systèmes récurrents linéaires, du type

$$X_{k+1} = AX_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

où A est une matrice carrée, et X_k désigne un vecteur dont on souhaite connaître l'expression en fonction de k et d'une condition initiale qu'on note X_0 .

Ici on a

$$X_k = AX_{k-1} = A(AX_{k-2}) = A^2X_{k-2} = \dots = A^kX_0$$

Donc, pour obtenir X_k explicitement en fonction de k et X_0 , il faut calculer A^k . C'est possible si A est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et une matrice de passage P , telles que

$$A = PDP^{-1}$$

On a alors

$$A^k = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Donc

$$X_k = PD^kP^{-1}X_0 \text{ où } D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

◆ Exemple 3.9

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ les trois suites réelles définies sous forme récurrente par leurs premiers termes u_0 , v_0 , w_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \end{cases}$$

Écrivons u_n , v_n , w_n en fonction de n , u_0 , v_0 et w_0 .

- En posant

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

le système (S) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}}_{X_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- On a déjà montré que la matrice A est diagonalisable (voir l'exemple 3.8), et on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} A^n &= \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^P \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}^{D^n} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}^{P^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 2^n \\ 1 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Enfin, puisque $X_{n+1} = AX_n$ implique $X_n = A^n X_0$, alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix}}_{A^n} \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}}_{X_0}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_n = (2^n - 1)(u_0 - v_0 - w_0) + 2^n u_0 \\ v_n = (2^n - 1)(u_0 - w_0) + v_0 \\ w_n = (2^n - 1)(u_0 - v_0) + w_0 \end{cases}$$