

Exercice 1.

Soit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A + B$, $A - B$, $5A - 3B$.
2. Calculer $A^t B$ et $B^t A$, A^t et B^t désignent les matrices transposées de A et B .
3. Peut-on faire le produit AB ?

Exercice 2.

Soit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \text{ et } B = A - I_3$$

1. Calculer B , B^2 , B^3 . En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On rappelle la formule du binôme de Newton pour les matrices de même taille et qui commutent :

$$(M + N)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k M^k N^{n-k} \text{ avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Montrer que A^3 est combinaison linéaire de A^2 , A et I_3 .
3. En déduire que A^n est combinaison linéaire de A^{n-1} , A^{n-2} et A^{n-3} si $n \geq 3$.

Exercice 3.

Calculer les déterminants suivants. Qu'en concluez-vous sur les matrices correspondantes ?

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 4.

Calculer l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 10 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

En utilisant des résultats de l'exercice 4, résoudre par inversion matricielle les systèmes suivants

$$1. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \\ x + 3y + 2 = -9 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 2y + t = 7 \\ -x + 5y - z = 1 \\ x - y + 5z + 6t = 0 \\ -y - z - t = -1 \end{cases}$$

Exercice 7.

Trois entreprises E_1 , E_2 et E_3 ont estimé leurs besoins en matériels informatiques comme suit :

	Ordinateurs	Imprimantes	Scanners
Entreprise E_1	15	10	3
Entreprise E_2	20	7	5
Entreprise E_3	10	3	2

Les prix HT par unité, en DH, proposés par deux fournisseurs F_1 et F_2 sont les suivants :

	Prix de F_1	Prix de F_2
Ordinateur	1524	1372
Imprimante	750	720
Scanner	500	550

Pour chaque question, on nommera par une lettre chaque matrice intervenant, en précisant ce qu'elle représente.

1. a- Donner la matrice représentant les dépenses HT respectives de E_1 , E_2 et E_3 , suivant qu'ils achètent chez F_1 ou F_2 .
b- Les deux fournisseurs proposent une remise de 10% sur tous les produits. La TVA sur ces produits étant de 20% déterminer la matrice des dépenses TTC respectives de E_1 , E_2 et E_3 suivant qu'ils achètent chez F_1 ou F_2 .
2. Finalement les entreprises E_1 , E_2 et E_3 , se sont équipées chez un autre fournisseur F_3 et ont dépensé respectivement 30 888Dh, 36 972Dh et 17 820Dh.
a- Établir le système à résoudre pour trouver le prix unitaire TTC de chaque type d'articles.

- b**– Résoudre le système en utilisant le calcul matriciel et conclure.
- c**– En déduire la matrice colonne donnant les prix unitaires HT de chaque article chez F_3 et conclure.

Exercice 1.

Soit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A + B$, $A - B$, $5A - 3B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5A - 3B = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 24 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Calculer $A^t B$ et $B^t A$, A^t et B^t désignent les matrices transposées de A et B .

$$\begin{aligned} A^t B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 5 & 33 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^t A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & 33 & -3 \\ -3 & 4 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Peut-on faire le produit AB ?

Ce produit est impossible car le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B .

Exercice 2.

Soit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \text{ et } B = A - I_3$$

1. Calculer B , B^2 , B^3 . En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $B^k = 0$ pour tout entier $k \geq 3$. Puisque la matrice unité commute avec toute matrice (du même ordre), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= (B + I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k B^k I_3^{n-k} \\ &= I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & 0 \\ nc + \frac{n(n-1)}{2} ab & nb & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que A^3 est combinaison linéaire de A^2 , A et I_3 .

De $B = A - I_3$ il vient

$$B^3 = (A - I_3)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0, \text{ d'où}$$

$$A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$$

3. En déduire que A^n est combinaison linéaire de A^{n-1} , A^{n-2} et A^{n-3} si $n \geq 3$.

Pour $n \geq 3$, en multipliant l'égalité $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$ par A^{n-3} , on obtient :

$$A^n = 3A^{n-1} - 3A^{n-2} + A^{n-3} \text{ pour tout entier } n \geq 3$$

Exercice 3.

Calculer les déterminants suivants. Qu'en concluez-vous sur les matrices correspondantes?

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 41$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -135$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Les matrices correspondantes à D_1 , D_2 et D_3 sont inversibles. Pour la matrice correspondante à D_4 , elle est inversible si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $c = b$.

Exercice 4.**L'inverse des matrices A , B et C .**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 & -3/5 \\ -3/5 & 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 12 & -8 & -4 & -12 \\ 2 & 0 & -2 & -10 \\ -2 & -8 & -6 & -38 \\ 0 & 8 & 8 & 32 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 & -3/4 \\ 1/8 & 0 & -1/8 & -5/8 \\ -1/8 & -1/2 & -3/8 & -19/8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.**Déterminer le rang des matrices suivantes**

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 10 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 32 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(B) = 3$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

On a $\text{rang}(C) \leq 3$. Toutes les sous matrices carrées d'ordre 3 extraites de C ont un déterminant nul, donc

$$\det(C) \leq 2. \text{ Or } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Exercice 6.**Résoudre par inversion matricielle les systèmes suivants**

$$1. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \\ x + 3y + 2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow BX = b \text{ avec}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

D'après l'exercice 4, la matrice B est inversible et son inverse est donné par

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 & -3/5 \\ -3/5 & 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } X = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 31/5 \\ -14/5 \\ -17/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } S = \{(31/5, -14/5, -17/5)\}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y + t = 7 \\ -x + 5y - z = 1 \\ x - y + 5z + 6t = 0 \\ -y - z - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow CX = c \text{ avec}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\text{et } c = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'exercice 4, la matrice C est inversible et son inverse est donné par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 & -3/4 \\ 1/8 & 0 & -1/8 & -5/8 \\ -1/8 & -1/2 & -3/8 & -19/8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } X = C^{-1}c = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } S = \{(11/2, 3/2, 1, -3/2)\}$$

Exercice 7.

Trois entreprises E_1 , E_2 et E_3 ont estimé leurs besoins en matériels informatiques comme suit :

	Ordinateurs	Imprimantes	Scanners
Entreprise E_1	15	10	3
Entreprise E_2	20	7	5
Entreprise E_3	10	3	2

Les prix HT par unité, en DH, proposés par deux fournisseurs F_1 et F_2 sont les suivants :

	Prix de F_1	Prix de F_2
Ordinateur	1524	1372
Imprimante	750	720
Scanner	500	550

Pour chaque question, on nommera par une lettre chaque matrice intervenant, en précisant ce qu'elle représente.

1. a- Donner la matrice représentant les dépenses HT respectives de E_1 , E_2 et E_3 , suivant qu'ils achètent chez F_1 ou F_2 .

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{32}(\mathbb{R})$, où le coefficient a_{ij} représente le montant HT que paiera l'entreprise E_i si elle achète chez le fournisseur F_j .

La matrice A est obtenu comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 3 \\ 20 & 7 & 5 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1524 & 1372 \\ 750 & 720 \\ 500 & 550 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 31\,860 & 29\,430 \\ 38\,230 & 35\,230 \\ 18\,490 & 16\,980 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par exemple, si l'entreprise E_3 décide d'acheter le matériel informatique dont elle a besoin chez le fournisseur F_2 , elle paiera 16 980Dh/HT.

- b- Les deux fournisseurs proposent une remise de 10% sur tous les produits. La TVA sur ces produits étant de 20% déterminer la matrice des dépenses TTC respectives de E_1 , E_2 et E_3 suivant qu'ils achètent chez F_1 ou F_2 .**

Soient B et C deux matrices qui représentent respectivement les dépenses après la remise et les dépenses TTC. Elles sont obtenues comme suit :

$$B = (1 - 10/100)A$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9 \times 31\,860 & 0.9 \times 29\,430 \\ 0.9 \times 38\,230 & 0.9 \times 35\,230 \\ 0.9 \times 18\,490 & 0.9 \times 16\,980 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 28\,674 & 26\,487 \\ 34\,407 & 31\,707 \\ 16\,641 & 15\,282 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 + 20/100)B$$

$$= \begin{pmatrix} 1.2 \times 28\,674 & 1.2 \times 26\,487 \\ 1.2 \times 34\,407 & 1.2 \times 31\,707 \\ 1.2 \times 16\,641 & 1.2 \times 15\,282 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 34\,408.80 & 31\,784.40 \\ 41\,288.40 & 38\,048.40 \\ 19\,969.20 & 18\,338.40 \end{pmatrix}$$

- 2. Finalement les entreprises E_1 , E_2 et E_3 , se sont équipées chez un autre fournisseur F_3 et ont dépensé respectivement 30 888Dh, 36 972Dh et 17 820Dh.**

- a- Établir le système à résoudre pour trouver le prix unitaire TTC de chaque type d'articles.**

Soient x , y et z les prix unitaires TTC respectifs des ordinateurs, imprimantes et scanners.

Le système à résoudre pour trouver le prix unitaire TTC de chaque type d'articles est le suivant :

$$\begin{cases} 15x + 10y + 3z = 30\,888 \\ 20x + 7y + 5z = 36\,972 \\ 10x + 3y + 2z = 17\,820 \end{cases}$$

- b- Résoudre le système en utilisant le calcul matriciel et conclure.**

$$\begin{cases} 15x + 10y + 3z = 30\,888 \\ 20x + 7y + 5z = 36\,972 \\ 10x + 3y + 2z = 17\,820 \end{cases} \Leftrightarrow MX = b \text{ avec}$$

$$M = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 3 \\ 20 & 7 & 5 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b = \begin{pmatrix} 30\,888 \\ 36\,972 \\ 17\,820 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(M) = 55$, donc M est inversible est sa matrice inverse est

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/55 & -1/5 & 29/55 \\ 2/11 & 0 & -3/11 \\ -2/11 & 1 & -19/11 \end{pmatrix}$$

D'où

$$X = M^{-1}b$$

$$= \begin{pmatrix} -1/55 & -1/5 & 29/55 \\ 2/11 & 0 & -3/11 \\ -2/11 & 1 & -19/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30\,888 \\ 36\,972 \\ 17\,820 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,440 \\ 756 \\ 576 \end{pmatrix}$$

Conclusion : les prix unitaires TTC, en Dh, proposés par le fournisseur F_3 sont comme suit

	Prix de F_3
Ordinateur	1440
Imprimante	756
Scanner	576

- c- En déduire la matrice colonne donnant les prix unitaires HT de chaque article chez F_3 et conclure.**

Soit D la matrice colonne donnant les prix unitaires HT de chaque article chez F_3 . La matrice D est obtenue comme

$$\text{suit : } D = 1/1.2 \begin{pmatrix} 1\,440 \\ 756 \\ 576 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,200 \\ 630 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Conclusion : les prix unitaires HT, en Dh, proposés par le fournisseur F_3 sont comme suit

	Prix de F_3
Ordinateur	1200
Imprimante	630
Scanner	480

De plus, on remarque que malgré la remise proposée par F_2 et F_1 , les prix proposés par F_3 sont bien meilleurs.

Exercice 1.

Résoudre avec la méthode de Cramer les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 3x + 7y - z = 7 \\ -x + 2y + z = 5 \\ -x + 8y - z = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y - 4z = 2 \\ -2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y - 2z = 6 \end{cases}$$

Exercice 2.

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 11y - 5z = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 11y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 3z = 4 \\ 2x + y + 4z = 7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 \\ 2x + 3y + 4z + t = -1 \\ 3x + 7y + z - 6t = 6 \end{cases}$$

Exercice 3.

Calculer par la méthode du pivot de Gauss l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

On considère le système linéaire

$$(S_\alpha) \begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel.

1. Calculer le déterminant de la matrice associée au système (S_α) .
2. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles ce système est de Cramer.

3. Résoudre et discuter suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le système (S_α) .

Exercice 5.

Le service informatique de gestion d'une entreprise occupe un grand bureau au troisième étage. Sa masse salariale est de 41 400Dh par mois et ce service utilise 9 ordinateurs pour la gestion totale.

On restructure ce service en trois bureaux b_1 , b_2 et b_3 de x , y et z personnes respectivement.

- Chaque personne du bureau b_1 reçoit en moyenne 5 100Dh par mois, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 10% de la gestion totale.
- Chaque personne du bureau b_2 reçoit en moyenne 4 200Dh, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 5% de la gestion totale.
- Chaque personne du bureau b_3 reçoit, en moyenne 4 800Dh, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 20% de la gestion totale.

1. Traduire les informations ci-dessus en un système (S) de trois équations à trois inconnues x , y et z .
2. Résoudre le système (S) de trois façons différentes, et en déduire le nombre de personnes dans chaque bureau.

Exercice 6 (Facultatif).

Une firme internationale utilise trois sous-traitants A , B et C pour la fabrication de calculettes qui lui fournissent par jour :

- A fournit : 100 boîtiers ; 40 claviers et 20 afficheurs.
- B fournit : 100 boîtiers et 400 afficheurs.
- C fournit : 30 boîtiers ; 80 claviers et 10 afficheurs.

Cette firme veut réaliser en toute urgence 1 000 calculettes. Elle a donc besoin de 1 000 boîtiers, 1 000 claviers et 1 000 afficheurs. On note x , y et z le nombre de jours nécessaires à la fabrication pour chaque sous-traitant.

1. Traduire les informations ci-dessus en un système (S) de trois équations à trois inconnues x , y et z .
2. Résoudre alors le système (S) et en déduire le nombre de jours de fabrication de chaque sous-traitant.

Exercice 1.

Résoudre avec la méthode de Cramer les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 3x + 7y - z = 7 \\ -x + 2y + z = 5 \\ -x + 8y - z = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -38;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -57;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -38;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -171;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-57}{-38} = \frac{3}{2}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-38}{-38} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-171}{-38} = \frac{9}{2}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{9}{2} \right) \right\}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y - 4z = 2 \\ -2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y - 2z = 6 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 15;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 28;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 50;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 19;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{28}{15}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{19}{15}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \left(\frac{28}{15}, \frac{10}{3}, \frac{19}{15} \right) \right\}$$

Exercice 2.

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

1. Considérons le système linéaire :

$$(S_1) \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 11y - 5z = 5 \end{cases}$$

Écrivons le système linéaire (S_1) sous forme d'un système triangulaire supérieur. En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée du système (S_1) , on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 1 & 11 & -5 & | & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 7 & -3 & | & -3 \\ 0 & 14 & -6 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 7 & -3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

D'où le système

$$(S'_1) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 7y - 3z = -3 \\ 0 = 10 \end{cases}$$

La dernière égalité est absurde. Elle traduit l'incompatibilité du système. Il n'y a donc pas de solution : $S = \emptyset$

2. Considérons le système linéaire :

$$(S_2) \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 11y - 5z = 0 \end{cases}$$

L'étape d'élimination s'effectue comme dans la question précédente et conduit au système

$$(S'_2) \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 & (1) \\ 7y - 3z = 0 & (2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système (S'_2) est compatible, il admet donc au moins une solution. Puisque le rang du système vaut 2 ($< n = 3$) alors il existe une infinité de solutions dont la forme générale dépend de $3 - 2 = 1$ paramètre. Ainsi,

$$(2) \Rightarrow y = \frac{3}{7}z$$

$$(1) \Rightarrow x = 3y - 2z = 3 \times \frac{3}{7}z - z = \frac{2}{7}z$$

D'où

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{7}z, \frac{3}{7}z, z \right) \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Considérons le système

$$(S_3) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 3z = 4 \\ 2x + y + 4z = 7 \end{cases}$$

L'étape d'élimination conduit au système

$$(S'_3) \begin{cases} x + y + z = 3 & (3) \\ y - 2z = -1 & (4) \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système (S'_3) est compatible, et puisque $r = 2 < n = 3$ alors il y a une infinité de solutions dont la forme générale dépend de $3 - 2 = 1$ paramètre. Ainsi,

$$(4) \Rightarrow y = -1 + 2z$$

$$(3) \Rightarrow x = 3 - y - z = 3 + 1 - 2z - z = 4 - 3z$$

D'où

$$S = \{(4 - 3z, -1 + 2z, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}\}$$

4. Considérons le système

$$\begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 \\ 2x + 3y + 4z + t = -1 \\ 3x + 7y + z - 6t = 6 \end{cases}$$

L'étape d'élimination conduit au système

$$(S'_4) \begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 & (5) \\ y - 2z - 3t = 3 & (6) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système (S'_4) est compatible, et puisque $r = 2 < n = 4$ alors il y a une infinité de solutions dont la forme générale dépend de $4 - 2 = 2$ paramètres. Ainsi,

$$(6) \Rightarrow y = 3 + 2z + 3t$$

$$(5) \Rightarrow x = -2 - y - 3z - 2t = -5 - 5z - 5t$$

D'où

$$S = \{(-5 - 5z - 5t, 3 + 2z + 3t, z, t) \text{ avec } (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 3.

Calculer par la méthode du pivot de Gauss l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid I_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow -1/2 L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -1/3 L_3 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &(B \mid I_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

D'où

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

On considère le système linéaire

$$(S_\alpha) \begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel.

1. Calculer le déterminant de la matrice associée au système (S_α).

Notons A_α la matrice associée au système (S_α). On a

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \det(A_\alpha) = 1 - \alpha^2 = (1 - \alpha)(1 + \alpha).$$

2. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles ce système est de Cramer.

Le système (S_α) est de Cramer si et seulement si $\det(A_\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

3. Résoudre et discuter suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le système (S_α).

a- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. En utilisant la méthode de Cramer, on obtient :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\alpha(1 - \alpha);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\alpha - 1)^2;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \left(\frac{2\alpha}{\alpha + 1}, 0, \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right) \right\}$$

b- si $\alpha = 1$. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient $S = \{(1 - y, y, 0) / y \in \mathbb{R}\}$.

c- si $\alpha = -1$. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient $S = \emptyset$.

Exercice 5.

Le service informatique de gestion d'une entreprise occupe un grand bureau au troisième étage. Sa masse salariale est de 41 400Dh par mois et ce service utilise 9 ordinateurs pour la gestion totale.

On restructure ce service en trois bureaux b_1 , b_2 et b_3 de x , y et z personnes respectivement.

- Chaque personne du bureau b_1 reçoit en moyenne 5 100Dh par mois, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 10% de la gestion totale.
- Chaque personne du bureau b_2 reçoit en moyenne 4 200Dh, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 5% de la gestion totale.

- Chaque personne du bureau b_3 reçoit, en moyenne 4 800Dh, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 20% de la gestion totale.

1. Traduire les informations ci-dessus en un système (S) de trois équations à trois inconnues x , y et z .

Soient x , y et z le nombre de personnes dans les bureaux b_1 , b_2 et b_3 respectivement. Les données de l'énoncé conduisent au système suivant :

$$(S) \begin{cases} 5100x + 4200y + 4800z = 41400 \\ x + y + z = 9 \\ 10\%x + 5\%y + 20\%z = 100\% \end{cases}$$

2. Résoudre le système (S) de trois façons différentes, et déduire le nombre de personnes dans chaque bureau.

On a

$$(S) \begin{cases} 5100x + 4200y + 4800z = 41400 \\ x + y + z = 9 \\ 10\%x + 5\%y + 20\%z = 100\% \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S') \begin{cases} 17x + 14y + 16z = 138 \\ x + y + z = 9 \\ 2x + y + 4z = 20 \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre le système (S').

a- En utilisant l'inversion matricielle :

La matrice A associée au système (S') est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 16 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice A est inversible (car $\det(A) = 7 \neq 0$) et sa matrice inverse est donnée par :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & -40/7 & -2/7 \\ -2/7 & 36/7 & -1/7 \\ -1/7 & 11/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & -40/7 & -2/7 \\ -2/7 & 36/7 & -1/7 \\ -1/7 & 11/7 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 138 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b- En utilisant la méthode de Cramer :

Le système (S') est un système de Cramer dont la solution est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 138 & 14 & 16 \\ 9 & 1 & 1 \\ 20 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 138 & 16 \\ 1 & 9 & 1 \\ 2 & 20 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{28}{7} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 14 & 138 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 20 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{21}{7} = 3$$

c- En utilisant la méthode du Pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 17 & 114 & 16 & | & 138 \\ 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 2 & 1 & 4 & | & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 17 & 14 & 16 & | & 138 \\ 0 & 3/17 & 1/17 & | & 15/17 \\ 0 & -11/17 & 36/17 & | & 64/17 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1/17 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2/17 L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 17 & 14 & 16 & | & 138 \\ 0 & 3/17 & 1/17 & | & 15/17 \\ 0 & 0 & 7/3 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 11/3 L_2 \end{matrix}$$

Le système (S') est équivalent au système :

$$(S'') \begin{cases} 17x + 14y + 16z = 138 & (1) \\ \frac{3}{17}y + \frac{1}{17}z = \frac{15}{17} & (2) \\ \frac{7}{3}z = 7 & (3) \end{cases}$$

d'où,

$$(3) \Rightarrow z = 3$$

$$(2) \Rightarrow y = 4$$

$$(1) \Rightarrow x = 2$$

Ainsi, le nombre de personnes dans les bureaux b_1 , b_2 et b_3 sont 2, 4 et 3 respectivement.

Exercice 6 (Facultatif).

Une firme internationale utilise trois sous-traitants A , B et C pour la fabrication de calculatrices qui lui fournissent par jour :

- A fournit : 100 boîtiers ; 40 claviers et 20 afficheurs.
- B fournit : 100 boîtiers et 400 afficheurs.
- C fournit : 30 boîtiers ; 80 claviers et 10 afficheurs.

Cette firme veut réaliser en toute urgence 1 000 calculatrices. Elle a donc besoin de 1 000 boîtiers, 1 000 claviers et 1 000 afficheurs. On note x , y et z le nombre de jours nécessaires à la fabrication pour chaque sous-traitant.

1. Traduire les informations ci-dessus en un système (S) de trois équations à trois inconnues x , y et z .

Les données de l'énoncé conduisent au système suivant :

$$(S) \begin{cases} 100x + 100y + 30z = 1000 \\ 40x + 80z = 1000 \\ 20x + 400y + 100z = 1000 \end{cases}$$

2. Résoudre alors le système (S) et en déduire le nombre de jours de fabrication de chaque sous-traitant.

Le système (S) admet une solution unique :

$$x = 5$$

$$y = 2$$

$$z = 10$$

Exercice 1.

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2.

Soit A la matrice carrée définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$.
2. Déterminer les sous-espaces propre de A . En déduire que A est diagonalisable.
3. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage utilisée.
4. Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ les trois suites réelles définies sous forme récurrente par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le système suivante :

$$(S) \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n - w_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + w_n \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2. Calculer les valeurs propres de A .
3. Déterminer les sous espaces propres de A . En déduire que A est diagonalisable.
4. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage utilisée.
5. Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Écrire u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0 .

Exercice 4.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et justifier que $\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{13}{20}, 1 \right\}$.
2. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage.
3. Montrer que

$$A^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 + 5 \left(\frac{13}{20} \right)^n & 2 - 2 \left(\frac{13}{20} \right)^n \\ 5 - 5 \left(\frac{13}{20} \right)^n & 5 + 2 \left(\frac{13}{20} \right)^n \end{pmatrix}$$

4. Application.

Le directeur d'un magazine souhaite connaître les parts du marché qui seront prises par sa revue. Par expérience il sait que 90% des abonnés renouvellent chaque année leur souscription, par ailleurs, 25% de la population des non abonnés une année prennent une nouvelle souscription l'année suivante. On note u_n et v_n les proportions respectives des non abonnés et abonnés de l'année courante.

- a- Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n .
- b- On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
- c- Si 20% du marché possède cette année un abonnement au magazine, quel sera le taux des souscripteurs dans un an, dans 10 ans, à très long terme.

Exercice 5 (Facultatif).

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+3} = 3u_n + u_{n+1} - 3u_{n+2}, \quad u_0, u_1, u_2 \text{ sont donnés}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier qu'il existe $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et justifier que $\text{Sp}(A) = \{-3, -1, 1\}$.
3. Montrer que A est diagonalisable.
4. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage utilisée.
5. Écrire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de n .

Exercice 1.

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice A est une matrice symétrique, elle est donc diagonalisable.

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 5 \\ -8 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(4-X) + 40 \\ &= X^2 - 6X + 48 \end{aligned}$$

Le discriminant de $P_B(X)$ est $\Delta = -156 < 0$, le polynôme caractéristique n'a pas de racines réelles, donc la matrice B n'a pas de valeurs propres réelles, d'où B n'est pas diagonalisable.

3. $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} P_C(X) &= \begin{vmatrix} 4-X & 1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(2-X) + 1 \\ &= X^2 - 6X + 9 \\ &= (X-3)^2 \end{aligned}$$

Donc la matrice C admet une seule valeur propre qui est 3, et dont l'ordre de multiplicité est $m(3) = 2$. Il reste à calculer la dimension de E_3 .

On sait que $\dim(E_3) = 2 - \text{rg}(C - 3I_2)$, or

$$C - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et $\text{rg}(C - 3I_2) = 1$, donc $\dim(E_3) = 1 \neq m(3)$, d'où C n'est pas diagonalisable.

4. $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} P_D(X) &= \begin{vmatrix} 4-X & 2 & -4 \\ 1 & 4-X & -3 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4-X & 2 & -4 \\ 1 & 4-X & -3 \\ 0 & X-3 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4-X & -2 & -4 \\ 1 & 1-X & -3 \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (3-X) \begin{vmatrix} 4-X & -2 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (3-X)(X^2 - 5X + 6) \\ &= (2-X)(X-3)^2 \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(D) = \{2, 3\}$

On a $\dim(E_2) = 1$, il reste à calculer la dimension de E_3 , pour cela il suffit de calculer le $\text{rg}(D - 3I_3)$.

On a

$$D - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} &= -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D - 3I_3) = 2 \\ \Rightarrow \dim(E_3) &= 3 - \text{rg}(D - 3I_3) = 1 \end{aligned}$$

Donc $\dim(E_3) \neq m(3)$, d'où D n'est pas diagonalisable.

5. $E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} P_E(X) &= \begin{vmatrix} -2-X & 3 & -3 \\ 0 & 1-X & -1 \\ 0 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (-2-X) \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (-2-X)(X^2 - 4X + 4) \\ &= -(2+X)(X-2)^2 \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(E) = \{-2, 2\}$. On a $\dim E_{-2} = 1 = m(-2)$, il reste à calculer la dimension du sous espace propre E_2 .

Soit $X = (x, y, z)^t \in E_2 = \ker(E - 2I_3)$. On a

$$\begin{aligned}(E - 2I_3)X = 0 &\Rightarrow \begin{cases} -4x + 3y - 3z = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4x + 3y - 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4x + 3y - 3z = 0 \\ z = -y \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ z = -y \end{cases}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \\ -y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

donc $\dim E_2 = 1 \neq m(2)$, d'où E n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.

Soit A la matrice carrée définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$.

$$\begin{aligned}P_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)^2(3-X)\end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$.

2. Déterminer les sous-espaces propre de A . En déduire que A est diagonalisable.

- Soit $X = (x, y, z)^t \in E_1 = \ker(A - I_3)$. On a

$$\begin{aligned}(A - I_3)X = 0 &\Rightarrow x + y + 2z = 0 \\ &\Rightarrow x = -y - 2z\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

- Soit $X = (x, y, z)^t \in E_3 = \ker(A - 3I_3)$. On a

$$\begin{aligned}(A - 3I_3)X = 0 &\Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}E_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé et $\dim(E_1) = 2 = m(1)$ et $\dim(E_3) = 1 = m(3)$. D'après le critère de diagonalisation, la matrice A est diagonalisable.

3. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage utilisée.

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$\begin{aligned}D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{et } P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}A^n &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3^n - 1 & 3^n - 1 & 2 \times 3^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice 3.

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ les trois suites réelles définies sous forme récurrente par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système (S) s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose alors } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les valeurs propres de A.

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} 3-X & -1 & -1 \\ 1 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-X & X-2 & 0 \\ 1 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 1 & 2-X & -1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)^2(1-X) \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

3. Déterminer les sous espaces propres de A. En déduire que A est diagonalisable.

- Soit $X = (x, y, z)^t \in E_1 = \ker(A - I_3)$. On a

$$\begin{aligned} (A - I_3)X = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Soit $X = (x, y, z)^t \in E_2 = \ker(A - 2I_3)$. On a

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)X = 0 &\Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = y + z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé et $\dim(E_1) = 1 = m(1)$ et $\dim(E_2) = 2 = m(2)$. D'après le critère de diagonalisation, la matrice A est diagonalisable.

4. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage utilisée.

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{et } P^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 2^n \\ 1 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Écrire u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0 .

On $X_{n+1} = AX_n \Rightarrow X_n = A^n X_0$. On obtient ainsi

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_n = (2^n - 1)(u_0 - v_0 - w_0) + 2^n u_0 \\ v_n = (2^n - 1)(u_0 - w_0) + v_0 \\ w_n = (2^n - 1)(u_0 - v_0) + w_0 \end{cases}$$

Exercice 4.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{10} \\ 1 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et justifier que $\text{Sp}(A) = \left\{\frac{13}{20}, 1\right\}$.

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_2) \\ &= \left(\frac{3}{4} - X\right)\left(\frac{9}{10} - X\right) - \frac{1}{40} \\ &= X^2 - \frac{33}{20}X + \frac{13}{20} \\ &= \left(X - \frac{13}{20}\right)(X - 1) \end{aligned}$$

2. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage.

$$\bullet E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\bullet E_{\frac{13}{20}} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\bullet A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \frac{13}{20} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{5}{7} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que

$$A^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 + 5\left(\frac{13}{20}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{13}{20}\right)^n \\ 5 - 5\left(\frac{13}{20}\right)^n & 5 + 2\left(\frac{13}{20}\right)^n \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= -\frac{5}{7} \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{13}{20}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{5}{7} \begin{pmatrix} -\left(\frac{13}{20}\right)^n & \frac{2}{5} \\ \left(\frac{13}{20}\right)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{5}{7} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} - \left(\frac{13}{20}\right)^n & -\frac{2}{5} + \left(\frac{13}{20}\right)^n \\ -1 + \left(\frac{13}{20}\right)^n & -1 - \frac{2}{5}\left(\frac{13}{20}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 + 5\left(\frac{13}{20}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{13}{20}\right)^n \\ 5 - 5\left(\frac{13}{20}\right)^n & 5 + 2\left(\frac{13}{20}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Application.

Le directeur d'un magazine souhaite connaître les parts du marché qui seront prises par sa revue. Par expérience il sait que 90% des abonnés renouvellent chaque année leur souscription, par ailleurs, 25% de la population des non abonnés une année prennent une nouvelle souscription l'année suivante. On note u_n et v_n les proportions respectives des non abonnés et abonnés de l'année courante.

a- Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n .

On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 90\%v_n + 25\%u_n \\ &= \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{10}v_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{4}\right)u_n + \left(1 - \frac{9}{10}\right)v_n \\ &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{10}v_n \end{aligned}$$

b- On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{10}v_n \\ \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{10}v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où $X_{n+1} = AX_n$

c- Si 20% du marché possède cette année un abonnement au magazine, quel sera le taux des souscripteurs dans un an, dans 10 ans, à très long terme.

On a

$$\begin{cases} v_0 = 20\% = \frac{1}{5} \\ u_0 = \frac{4}{5} \\ X_n = A^n X_0 \end{cases}$$

Donc, dans n années on aura

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{7} \left[\frac{4}{5} \left(2 + 5 \left(\frac{13}{20} \right)^n \right) + \frac{1}{5} \left(2 - 2 \left(\frac{13}{20} \right)^n \right) \right] \\ v_n = \frac{1}{7} \left[\frac{4}{5} \left(5 - 5 \left(\frac{13}{20} \right)^n \right) + \frac{1}{5} \left(5 + 2 \left(\frac{13}{20} \right)^n \right) \right] \end{cases}$$

- Le taux des souscripteurs dans un an est

$$v_1 = \frac{1}{7} \left[\frac{4}{5} \left(5 - 5 \left(\frac{13}{20} \right) \right) + \frac{1}{5} \left(5 + 2 \left(\frac{13}{20} \right) \right) \right] = 0.38 = 38\%$$

- Le taux des souscripteurs dans 10 ans est

$$v_{10} = \frac{1}{7} \left[\frac{4}{5} \left(5 - 5 \left(\frac{13}{20} \right)^{10} \right) + \frac{1}{5} \left(5 + 2 \left(\frac{13}{20} \right)^{10} \right) \right] = 0.7074 = 70.74\%$$

- Le taux des souscripteurs à très long terme est

$$\begin{aligned} v &= \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{7} \left[\frac{4}{5} \left(5 - 5 \left(\frac{13}{20} \right)^n \right) + \frac{1}{5} \left(5 + 2 \left(\frac{13}{20} \right)^n \right) \right] \\ &= 0.7143 = 71.43\% \text{ (car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{13}{20} \right)^n = 0) \end{aligned}$$

Exercice 5 (Facultatif).

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+3} = 3u_n + u_{n+1} - 3u_{n+2}, \quad u_0, u_1, u_2 \text{ sont donnés}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier qu'il existe $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ telle que

$$X_{n+1} = AX_n.$$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 3u_n + u_{n+1} - 3u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= AX_n \end{aligned}$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de A et justifier que $\text{Sp}(A) = \{-3, -1, 1\}$.

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 3 & 1 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1-X & -X & 1 \\ 1-X & 1 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ 0 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(1+X)(3+X) \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{-3, -1, 1\}$.

3. Montrer que A est diagonalisable.

- En calculant les sous espaces propres de A , on obtient :

$$\begin{aligned} - E_{-3} &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle \\ - E_{-1} &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ - E_1 &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

- De plus, on a

- Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé,
- $\dim E_{-3} = 1 = m(-3)$
- $\dim E_{-1} = 1 = m(-1)$
- $\dim E_1 = 1 = m(1)$

D'où A est diagonalisable. On pouvez aussi remarquer que A est diagonalisable car elle admet trois valeurs propres deux distinctes.

4. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage utilisée.

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$\begin{aligned} \bullet D &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \bullet P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

- $P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5. Écrire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de n .

E calculant A^n puis en utilisant $X_n = A^n X_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= (3 - (-3)^n + 6(-1)^n) u_0 \\ &+ (4 - 4(-1)^n) v_0 \\ &+ (1 + (-3)^n - 2(-1)^n) w_0 \end{aligned}$$