

Probabilité et Echantillonnage

Partie I: Probabilité

EL HACHLOUFI Mostafa

EL ATTAR Abderrahim

Partie I: Probabilité

Chapitre 1: Analyse Combinatoire

Chapitre 2: Calcul des Probabilités

Chapitre 3: Variables Aléatoires Discrètes

Chapitre 4: Variables Aléatoires continues

Chapitre 1

Analyse Combinatoire

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

INTRODUCTION

L'*analyse combinatoire* (techniques de **dénombrement**) permet :

- ❑ d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini;
- ❑ d'étudier différentes manières de **ranger** et d'**ordonner** des objets (les éléments d'un ensemble).

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

I. OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

I.1. Intersection de deux ensembles :

Soient A , B et C trois sous ensembles de Ω .

L'**intersection** de « A et B », notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B .

Deux ensembles sont dits **incompatibles** (ou disjoints) si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

On définit les opérations ensemblistes suivantes :

➤ Intersection de A et B est l'ensemble : $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ et } x \in B\}$

$$\diamond A \cap B = B \cap A$$

$$\diamond (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

I. OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

I.1. Intersection de deux ensembles : Exemple

Soit Ω un ensemble : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A , B et C des sous-ensembles de Ω , tels que:

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

$$B = \{1, 2, 3\}.$$

$$C = \{1, 6\}.$$

1. Déterminer : $A \cap B$

2. Vérifier les propriétés suivantes :

$$\diamond A \cap B = B \cap A$$

$$\diamond (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

I. OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

I.2. Réunion de deux ensembles :

Soient A , B et C trois sous ensembles de Ω .

Le **réunion** de « A et B », notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B .

On définit les opérations ensemblistes suivantes :

➤ Réunion de A et B est l'ensemble: $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$$\blacklozenge A \cup B = B \cup A$$

$$\blacklozenge (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

I. OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

I.2. Réunion de deux ensembles : Exemple

Soit Ω un ensemble : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A , B et C des sous-ensembles de Ω , tels que:

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

$$B = \{1, 2, 3\}.$$

$$C = \{1, 6\}.$$

1. Déterminer : $A \cup B$

2. Vérifier les propriétés suivantes :

$$\blacklozenge A \cup B = B \cup A$$

$$\blacklozenge (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

I. OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

I.3. Complémentaire d'un ensemble :

Soit A un sous ensemble de Ω .

Complémentaire de A , noté $\bar{A}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A .

➤ Complémentaire de A est l'ensemble: $\bar{A} = \{x \in \Omega / x \notin A\}$

$$\diamond A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\diamond A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$\diamond \bar{\bar{A}} = A$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

I. OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

I.3. Complémentaire d'un ensemble : Exemple

Soit Ω un ensemble : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A un sous-ensemble de Ω , tels que:

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

1. Déterminer $\bar{A}$

2. Vérifier les propriétés suivantes :

$$\diamond A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\diamond A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$\diamond \bar{\bar{A}} = A$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

I. OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

I.4. Propriétés :

Soient A et B deux sous ensemble de Ω .

$$A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A} \quad (A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \Omega, x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

EXERCICE 1.

Soit Ω un ensemble : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A , B et C des sous-ensembles de Ω , tels que:

$$A = \{1, 2\}.$$

$$B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

$$C = \{6\}.$$

1. Déterminez les sous-ensembles suivants de Ω :

$$\bar{A} \cap B ; \quad \bar{A} \cup B ; \quad \bar{A} \cup C ; \quad \overline{(A \cup B \cup C)}.$$

2. Vérifier les propriétés suivantes :

$$A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

II. ELÉMENTS DISCERNABLES ET INDISCERNABLES

❖ Éléments discernables:

Ce sont les éléments qui sont tous différents.

Exemple 1: $\Omega = \{a, b, c, d\}$

❖ Éléments indiscernables:

Ce sont les éléments qui ne sont pas tous distingués.

Exemple 2 : $\Omega = \{a, a, a, b, b, c, c, c, c, d, d\}$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

III. DISPOSITION

❖ Disposition sans répétition:

C'est une disposition dont chaque élément **ne peut apparaître plus qu'une fois**.

Exemple 1 :

Soit un ensemble qui contient deux éléments (1 et 2). $\Omega = \{1, 2\}$

Combien de couples (sans répétition) peut-on former avec les chiffres (1 et 2)?

Les résultats possibles sont: (1,2) et (2,1).

Donc les couples (1,2) et (2,1) sont des **dispositions sans répétition**.

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

IV. DISPOSITION

❖ Disposition avec répétition:

C'est une disposition dont chaque élément **peut apparaître plus qu'une fois**.

Exemple 2 :

Soit un ensemble qui contient deux éléments (1 et 2). $\Omega = \{1, 2\}$

Combien de couples (avec répétition) peut-on former avec les chiffres (1 et 2)?

Les résultats possibles sont: (1,1) ; (1,2); (2,1) et (2,2).

Donc les couples (1,1) ; (1,2); (2,1) et (2,2) sont des **dispositions avec répétition**.

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

IV. DISPOSITION

❖ Disposition ordonnée:

C'est une disposition dont l'**emplacement des éléments joue un rôle** dans la composition de celle-ci.

❖ Disposition non ordonnée:

C'est une disposition dont l'**emplacement des éléments ne joue aucun rôle** dans la composition de celle-ci.

Soient deux éléments a et b :

- Si $(a, b) \neq (b, a)$ alors on parle de **disposition ordonnée**.
- Si $(a, b) \equiv (b, a)$ alors on parle de **disposition non ordonnée**.

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

IV. DISPOSITION

Exemple 3 :

Soit un ensemble qui contient deux éléments (1 et 2). $\Omega = \{1, 2\}$

1. Combien de couples (avec répétition et non ordonné) peut-on former avec les chiffres (1 et 2)?

Les résultats possibles sont: (1,1) ; (1,2) et (2,2).

Dans ce cas on a : (1,2) $\equiv$ (2,1) .

2. Combien de couples (sans répétition et non ordonné) peut-on former avec les chiffres (1 et 2)?

Les résultats possibles sont: (1,2).

Dans ce cas on a (1,2) $\equiv$ (2,1) .

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

IV. DISPOSITION

Exemple 4 :

Soit un ensemble qui contient deux éléments (1 et 2). $\Omega = \{1, 2\}$

1. Combien de couples (avec répétition et ordonné) peut-on former avec les chiffres (1 et 2)?

Les résultats possibles sont: (1,1) ; (1,2) ; (2,1) et (2,2).

Dans ce cas on a : (1,2) $\neq$ (2,1) .

2. Combien de couples (sans répétition et ordonné) peut-on former avec les chiffres (1 et 2)?

Les résultats possibles sont: (1,2) ; (2,1).

Dans ce cas on a (1,2) $\neq$ (2,1) .

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

V. PERMUTATION

- **Une permutation** d'un ensemble de n éléments distincts est **une disposition ordonnée sans répétition** de ces éléments.
- Le **nombre de permutation** qu'on peut former à partir d'un ensemble de n éléments est égal à $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ (la valeur factorielle de n).

Exemple 1:

Les permutations qu'on peut construire à partir de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ sont:

$(a, b, c), (a, c, b)$

$(b, a, c), (b, c, a)$

$(c, a, b), (c, b, a).$

Le nombre de permutation est égal à $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

VI. ARRANGEMENTS

Un **arrangement** de p éléments choisis parmi n éléments est une **disposition ordonnée** de p de ces n éléments ($p < n$). On distingue les **arrangements avec répétitions** et les **arrangements sans répétitions**.

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

VI. ARRANGEMENTS

- **Un arrangement sans répétition** de p éléments choisis parmi n est **une disposition ordonnée sans répétition** de p éléments choisis parmi n d'un ensemble E .

Le nombre d'arrangements sans répétitions est : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple 1:

Soit $E = \{a, b, c\}$, **les arrangements sans répétition** de 2 éléments qu'on peut former à partir des éléments de E sont:

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, a\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{c, b\}$

Le nombre d'arrangements **sans répétitions** que l'on peut faire avec 2 éléments choisis parmi 3 éléments a, b, c est :

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

VI. ARRANGEMENTS

- **Un arrangement avec répétition** de p éléments choisis parmi n est **une disposition ordonnée avec répétition** de p d'entre les n éléments.
- Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments qu'on peut former à partir de n éléments est égal à $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p. \text{ fois}} = n^p$

Exemple 1:

Soit $E = \{a,b,c\}$, les arrangements **avec répétition** de 2 éléments qu'on peut former à partir des éléments de E sont:

$\{a,a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,a\}, \{b,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{c,b\}, \{c,c\}$

Le nombre d'arrangement **avec répétition** de 2 éléments qu'on peut former à partir de 3 éléments est égal à $3^2 = 9$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

VI. COMBINAISONS

Une combinaison de p éléments choisis parmi n éléments est une disposition **non ordonnée** de p de ces n éléments. On distingue les **combinaisons avec répétitions** et les **combinaisons sans répétitions**.

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

VI. COMBINAISONS

➤ Combinaisons sans répétitions

Une combinaison de p éléments choisis parmi n éléments est une disposition **sans répétitions** et **non ordonnée** de p de ces n éléments.

Le nombre de combinaisons sans répétitions est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n - p)!}$$

Exemple:

Les combinaisons de 2 éléments pris dans $\{1, 2, 3, 4\}$ sont :

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{24}{4} = 6$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

VI. COMBINAISONS

➤ Combinaisons avec répétitions

Une combinaison de p éléments choisis parmi n éléments est une disposition **avec répétitions** et **non ordonnée** de p de ces n éléments..

Le nombre de combinaisons avec répétitions est :

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p! \times (n-1)!}$$

Exemple:

Les combinaisons de 2 éléments pris dans $\{1, 2, 3, 4\}$ sont :

$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 4\}$.

$$C_{4+2-1}^2 = \frac{(4+2-1)!}{2! \times (4-1)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = 10$$

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

VI. COMBINAISONS

Propriétés

- $C_n^n = C_n^0 = 1$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (Triangle de PASCAL)

Exercice: montrer que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Chapitre 2

Calcul des Probabilités

Chapitre 2: Calcul des Probabilités

La théorie des probabilités :

La théorie des probabilités concerne l'étude d'un **phénomène aléatoire** par la description de l'ensemble des **résultats possibles** d'une **expérience aléatoire**.

Domaines d'application :

- ✓ Economie;
- ✓ Assurance;
- ✓ Médecine;
- ✓ Psychologie, ...etc.

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

L'*expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat n'est pas connu avec certitude à l'avance.

Exemple :

- ✓ Lancement d'une pièce de monnaie
- ✓ Lancement d'un dé

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ ESPACE FONDAMENTAL

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **Univers des possibles (ou espace fondamental)**, et est souvent noté Ω

Exemple :

✓ Lancement d'un dé à 6 faces. On obtient un nombre $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

Le nombre des éléments de Ω appelé cardinal, noté: $Card(\Omega) = 6$

Chaque élément ω de Ω , ($\omega \in \Omega$) est appelé une **réalisation** ou une “**épreuve**”.

✓ Dans le cas de lancement d'une pièce de monnaie ,

$$\Omega = \{P, F\} \quad Card(\Omega) = 2$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EVÉNEMENT

On appelle **événement** tout sous-ensemble (ou partie) de l'univers des possibles (espace fondamental).

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire le **lancement d'un dé à 6 faces** :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad \text{Card}(\Omega) = 6$$

➤ L'événement **A « tirer un nombre pair »** se traduit par le sous-ensemble :

$$A = \{2; 4; 6\} \quad \text{Card}(A) = 3$$

$A \subset \Omega$ est un **événement** de l'univers des possibles .

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EVÉNEMENT

❖ **Événement contraire de A** : c'est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartient pas à A, on le note par $\bar{A}$.

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire le **lancement d'un dé à 6 faces** :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad Card(\Omega) = 6$$

➤ L'*événement contraire* de $A = \{2; 4; 6\}$ est l'événement **B « tirer un nombre impair »** se traduit par le sous-ensemble :

$$B = \{1; 3; 5\} \quad Card(B) = 3$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EVÉNEMENT

❖ **Événement impossible** : c'est l'événement qui ne contient aucun élément de Ω , on le note par $\emptyset$.

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire le **lancement d'un dé à 6 faces** :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad Card(\Omega) = 6$$

➤ L'événement C « **tirer un nombre < 0** » est un événement **impossible**.

$$C = \{\} \quad Card(C) = 0$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EVÉNEMENT

❖ **Événement certain** : c'est l'événement qui est constitué de tous les éléments de Ω .

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire le **lancement d'un dé à 6 faces** :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad \text{Card}(\Omega) = 6$$

➤ L'événement D « **tirer un nombre > 0** » est un événement **certain**.

$$D = \Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad \text{Card}(D) = 6$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EVÉNEMENT

❖ **Événement élémentaire** : c'est l'événement qui est réduit à une seule issue.

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire le **lancement d'un dé à 6 faces** :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad Card(\Omega) = 6$$

➤ L'événements **E « tirer un nombre supérieur à 5 »** *E* est un événement *élémentaire*.

$$E = \{6\} \quad Card(E) = 1$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EVÉNEMENT

Propriété :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire le jet d'un dé à 6 faces :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad \text{Card}(\Omega) = 6$$

➤ L'événement A « tirer un nombre pair » se traduit par le sous-ensemble :

$$A = \{2; 4; 6\} \quad \text{Card}(A) = 3$$

➤ L'événement B « tirer un nombre impair » se traduit par le sous-ensemble :

$$B = \{1; 3; 5\} \quad \text{Card}(B) = 3$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ DÉFINITION DE PROBABILITÉ

La probabilité d'un événement A notée $p(A)$ est une valeur comprise entre 0 et 1, $0 \leq p(A) \leq 1$.

Elle vérifie les axiomes suivants:

- $p(\Omega) = 1$
- Pour tous événements A et B disjoints

$$\text{On a : } p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ DÉFINITION DE PROBABILITÉ

Propriétés :

Soient A et B deux évènements:

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A) = 1 - p(\bar{A})$
- $A \subset B \implies p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$
- $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B)$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ DÉFINITION DE PROBABILITÉ

Propriété :

Soient A et B deux évènements:

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Démonstration :

On a $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

tel que $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ sont deux à deux disjoints.

Alors: $p(A \cup B) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B)$

On a d'après les propriétés précédentes: $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B)$$

On obtient alors: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

Exemple :

Soit une urne qui contient des boules **rouges** et des boules **blanches**. Je prélève une boule au hasard.

Soit les événements suivants :

R: «la boule soit rouge»

B: «la boule soit blanche»

L'événement B est l'événement contraire de R, ($B = \bar{R}$).

Si la probabilité de l'événement R est égale 0,7 ($p(R) = 0,7$)

Alors la probabilité de la boule soit blanche est :

$$p(B) = 1 - p(R)$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EVÉNEMENTS ÉQUIPROBABLES

Lorsque tous les **événements élémentaires** ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Si l'univers des possibles Ω a pour cardinal N ($\text{Card}(\Omega) = N$), les événements élémentaires ont une probabilité égale à $p = \frac{1}{N}$

Hypothèse d'équiprobabilité

Si $A \subset \Omega$ avec $\text{Card}(A) = m$, la probabilité de l'événement A sous l'hypothèse d'équiprobabilité est :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{m}{N}$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

Exemple : Soit l'expérience aléatoire suivante : « **Lancement d'un dé** », alors:

On a: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

● Soit A_i l'événement d'obtenir un numéro i , $A_i = \{\{i\}\}$ $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A_i est un évènement élémentaire de Ω avec $\text{card}(A_i)=1$

Tous les événements élémentaires ont la même probabilité, car il y a une **équiprobabilité**.

La probabilité d'obtenir un numéro i est : $P(A_i) = \frac{\text{card}(A_i)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$

● Si $A = \{1, 2, 4\}$ alors sous l'hypothèse d'équiprobabilité on a :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Soit A et B deux événements d'un même univers, tels que A soit de probabilité non nulle ($p(A) \neq 0$).

La **probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé** est définie par :

$$p(B/A) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

Exemple : Dans une classe de 36 élèves, 23 élèves ont 18 ans, 29 élèves sont des filles et 17 filles ont 18 ans. On choisit au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux évènements suivants : A : « l'élève est une fille », B : « l'élève a 18 ans », $A \cap B$: « l'élève est une fille de 18 ans ».

Ainsi
$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{29}{36}; \quad p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{23}{36}$$

et
$$p(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{17}{36}$$

Quelle est la probabilité que l'élève ait 18 ans, sachant que c'est une fille?

On remarque alors que
$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\cancel{17}/\cancel{36}}{\cancel{29}/\cancel{36}} = \frac{17}{29}$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ k évènements (parties de Ω).

Tel que $P(A_i) \neq 0, \forall i = [1, 2, \dots, k]$

- **Théorème de Bayes**

Soit un événement B indépendant de A_i avec $P(B) \neq 0$ alors :

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(B)}$$

Si B dont la réalisation dépend de l'une des causes A_i alors :

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B / A_i)} \quad \text{avec} \quad P(B / A_i) \neq 0, \forall i = [1, 2, \dots, k]$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exemple: Théorème de Bayes

Dans un laboratoire, on a l'expérience suivante : si une souris porte l'anticorps A, alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B; si une souris ne porte pas l'anticorps A, alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B. La moitié de la population porte l'anticorps A et 3 sur dix de la population porte l'anticorps B.

Calculez la probabilité que, si une souris porte l'anticorps B, alors elle porte aussi l'anticorps A : $P(A/B)$.

Soient les évènements suivants:

A : « La souris porte l'anticorps A »

$\bar{A}$: « La souris ne porte pas l'anticorps A »

B : « La souris porte l'anticorps B »

$\bar{B}$: « La souris ne porte pas l'anticorps B »

On a $\bullet P(A) = \frac{1}{2}$ $\bullet P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ $\bullet P(B) = \frac{3}{10}$ $\bullet P(B/A) = \frac{2}{5}$ $\bullet P(B/\bar{A}) = \frac{1}{5}$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exemple:

Calculez la probabilité que, si une souris porte l'anticorps B, alors elle porte aussi l'anticorps A : $P(A/B)$.

$$\text{On a } \bullet P(A) = \frac{1}{2} \quad \bullet P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \quad \bullet P(B) = \frac{3}{10} \quad \bullet P(B/A) = \frac{2}{5} \quad \bullet P(B/\bar{A}) = \frac{1}{5}$$

Pour la partition $(A_i)_{i=1,2} = (A_1, A_2) = (A, \bar{A})$, on applique la formule de Bayes:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B/A_i)} \quad i=1,2$$

$$\text{On a: } \sum_i P(A_i)P(B/A_i) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)$$

$$= P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exemple:

Calculez la probabilité que, si une souris porte l'anticorps B, alors elle porte aussi l'anticorps A : $P(A/B)$.

On a $\bullet P(A) = \frac{1}{2}$ $\bullet P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ $\bullet P(B) = \frac{3}{10}$ $\bullet P(B/A) = \frac{2}{5}$ $\bullet P(B/\bar{A}) = \frac{1}{5}$

On applique la formule de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

➤ EVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

➤ Soient A et B , deux parties de Ω .

Les événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

➤ Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ A et B sont indépendants si et seulement si

$$\begin{cases} p(A/B) = p(A) \\ p(B/A) = p(B) \end{cases}$$

➤ Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ n événements (parties de Ω).

On dit que les événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants deux à deux, si et seulement si :

$$p\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n p(A_i)$$

Chapitre 2 : Calcul des Probabilités

Exemple

Soient A , B , et C trois événements indépendants deux à deux tel que:

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{6}$$

Alors

- $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $p(A \cap C) = p(A) \cdot p(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $p(B \cap C) = p(B) \cdot p(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

Chapitre 3

Variables Aléatoires discrètes

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

DÉFINITION :

Une **variable aléatoire** X est une fonction de l'ensemble fondamental Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, i.e :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega_i \rightarrow X_i = X(\omega_i)$$

- ❖ Une variable aléatoire est dite **discrète** si elle prend des valeurs entières.
- ❖ Une variable aléatoire est dite **continue** si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini.

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

1. Loi de probabilité (distribution)

Soit X une variable aléatoire décrite définie sur Ω

Soit $\{(x_i) / i = 1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X et $p_i = p[X = x_i]$ la probabilité de l'événement " $X = x_i$."

La **loi** (ou **distribution**) de probabilité d'une variable aléatoire X est une fonction qui associe les valeurs possibles de X à la probabilité qui leur correspond. Notée (x_i, p_i)

On utilise souvent la représentation à l'aide d'un tableau :

Valeurs possibles x_i	x_1	x_2	...	x_n
probabilité $p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On a :
$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

1. Loi de probabilité (distribution)

Exemple 1:

Soit l'expérience aléatoire : **Lancement d'une pièce de monnaie** : $\Omega = \{P, F\}$

On définit la variable aléatoire suivante:
$$\begin{cases} X(w) = 1 & \text{si } w = F \\ X(w) = 0 & \text{si } w = P \end{cases}$$

La probabilité d'avoir **pile** est : 0,5 et celle d'avoir **face** est 0,5.

Le tableau suivant donne **la loi de probabilité de variable aléatoire étudiée**.

Résultat de l'expérience	Pile	Face
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	0	1
Les probabilités de réalisation des résultats $P(X=x_i)$	0,5	0,5

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

1. Loi de probabilité (distribution)

Exemple 2:

Soit l'expérience aléatoire suivante : « **Lancement d'un dé** ». $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Supposons qu'un individu reçoit 5 si l'un des numéros 1 ou 2 est obtenu, et 10 si l'un des numéros 3, 4, 5 ou 6 est le résultat.

Alors la variable aléatoire étudiée est la suivante:
$$\begin{cases} X(w) = 5 & \text{si } w = (1, 2) \\ X(w) = 10 & \text{si } w = (3, 4, 5, 6) \end{cases}$$

Alors la loi de probabilité de variable aléatoire étudiée :

Résultat de l'expérience	(1,2)	(3,4,5,6)
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	5	10
Les probabilités de réalisation des résultats $P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

2. Fonction de répartition

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie comme suit :

$$F : I \rightarrow [0,1]$$
$$x_i \mapsto F(x_i) = p[X \leq x_i] \quad \text{où } I \subset \mathbb{R}$$

$$\text{On a : } F(x_i) = p[X \leq x_i] = p[X = x_1] + \dots + p[X = x_i]$$

Propriétés

- ☐ F est une fonction positive , **croissante** et prend ses valeurs dans $[0,1]$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- ☐ F est continue à droite

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

2. Fonctions de répartition

Exemple :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité suivante :

X_i	1	2	3	4
$P_i = P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Alors la fonction de répartition est donnée par le tableau suivant:

X_i	1	2	3	4
$F(x_i)$	0,2	0,5	0,9	1

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

3. Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X de loi de probabilité (x_i, p_i) pour $i = 1, \dots, n$, notée $E(X)$, est donnée par la quantité suivante:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

3. Espérance mathématique

Exemple :

Considérons deux joueurs A et B à pile ou face.

Si le résultat de lancement est **pile**, le **joueur A** paye **2 Dh** au **joueur B**, sinon
, le **joueur B** paye **4 Dh** au **joueur A**.

Calculer l'espérance mathématique de **gain du joueur A**.

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

3. Espérance mathématique

Exemple

Soit X une variable aléatoire qui désigne le **gain du joueur A**.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est comme suit :

Résultat de l'expérience (espace fondamental Ω)	Pile	face
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	-2	4
Les probabilités associées aux résultats possibles $P_i = P(X=x_i)$	0,5	0,5

Expérience aléatoire : lancement d'une pièce de monnaie

Donc l'espérance mathématique est égale à :

$$E(X) = \sum_{i=1}^2 P(X = x_i) \times x_i = -2 \times 0,5 + 4 \times 0,5 = -1 + 2 = 1$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

3. Espérance mathématique

Propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires, a et b deux nombres réels.

- $E(aX + b) = aE(X) + b$

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$

Chapitre 3: Variable aléatoire discrètes

4. La variance et l'écart type

La variance d'une variable aléatoire X de loi de probabilité (x_i, p_i) pour $i = 1, \dots, n$, notée $V(X)$, est donnée par la quantité suivante:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sigma_X^2$$

- L'**écart-type** d'une variable aléatoire est donné par la formule suivante : $\sqrt{\sigma_X}$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

4. La variance et l'écart type

Propriétés:

- La variance est donnée par la formule

$$V(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\text{Espérance de la variable aléatoire } X^2} - \underbrace{E(X)^2}_{\text{Carré de l'espérance de la variable aléatoire } X}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n p(X = x_i) \times x_i^2$$

- $V(aX + b) = a^2 V(x)$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

4. La variance et l'écart type

Exemple :

Considérons deux joueurs A et B à pile ou face. Si le résultat de lancement est **pile**, le **joueur A** paye **2 Dh** au joueur B, sinon, le **joueur B** paye **4 Dh** au joueur A. Calculer la variance de **gain du joueur A**.

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

4. La variance et l'écart type

Exemple

Soit X une variable aléatoire qui désigne le gain du joueur A.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est comme suit :

Résultat de l'expérience (espace fondamental Ω)	Pile	face
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	-2	4
Les probabilités associées aux résultats possibles $P_i = P(X=x_i)$	0,5	0,5

Expérience aléatoire : lancement d'une pièce de monnaie

Donc l'espérance mathématique est égale à :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^2 p(X = x_i) \times x_i^2 = 0,5 \times 4 + 0,5 \times 16 = 2 + 8 = 10$$

Alors:
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 10 - 1 = 9$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

5. Moments d'ordre supérieur

- Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k , i.e:

$$m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i^k = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i^k$$

- Le moment centré d'ordre k de X est :

$$m'_k = E\left(\left[x_i - E(X)\right]^k\right) = \sum_{i=1}^n p_i \times \left[x_i - E(X)\right]^k$$

- Le moment d'ordre 1 : $m_1 = E(X)$
- Le moment d'ordre 2: $m_2 = E(X^2)$
-  $V(X) = m_2 - m_1^2$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

5. Moments d'ordre supérieur

➤ La **fonction génératrice des moments** d'une variable aléatoire X est la fonction :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^n e^{tx_i} p\{X = x_i\}$$

Sachant que :

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$$


$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!} = \frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \dots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \dots$$

Alors :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \dots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \dots\right)$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) = \frac{t}{1!} E(X) + \frac{t^2}{2!} E(X^2) + \dots + \frac{t^n}{n!} E(X^n) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} m_k = \frac{t}{1!} m_1 + \frac{t^2}{2!} m_2 + \dots + \frac{t^n}{n!} m_n + \dots \end{aligned}$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Uniforme

- Soit E une expérience aléatoire dont le cardinal de l'espace fondamental Ω est égal à n .
- Soit X une variable aléatoire tel que $X(w_i)$ où $w_i (i = 1, \dots, n) \in \Omega$
telles que x_i : les valeurs associées aux résultats possibles $w_i (i = 1, \dots, n) \in \Omega$

X suit la loi Uniforme si et seulement si:

$$p(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$

- $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Uniforme

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire suivante : « **Lancement d'un dé** »

Soit X le numéro obtenu par cette expérience.

La valeur de X est l'élément de l'événement $A = \{i\}$ où $i = 1, 2, \dots, 6$.

Alors:

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

L'espérance et la variance :

$$\bullet E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3,5$$

$$\bullet V(X) = \frac{n^2 - 1}{12} = \frac{6^2 - 1}{12} = 2,91$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

La **distribution de Bernoulli** prend la valeur 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $q = 1 - p$, définie comme suit :

$$\begin{aligned} P : \{0,1\} &\rightarrow [0,1] \\ X &\rightarrow p(X) \end{aligned} \quad \text{avec : } \begin{cases} p(X = 1) = p \\ p(X = 0) = q = 1 - p \end{cases}$$

On écrit $X \rightarrow B(1,p)$

Remarque: Cette expérience aléatoire est appelée l'expérience de **Bernoulli**.

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = p$
- $Var(X) = p.q = p(1 - p)$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire suivante : « **Lancement d'un dé** »

On s'intéresse dans cette expérience au numéro de la face **inférieure ou égale à 4**.

Alors on a:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ est l'événement concerné
- $p = p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

Exemple :

La variable aléatoire définie par:

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ Si le numéro obtenu est inférieur à 4} \\ 0 & , \text{ Sinon} \end{cases}$$

Suit la loi de Bernoulli $B(1, 2/3)$.

La moyenne et la variance de X sont:

$$E(X) = p = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p) = \frac{2}{9}$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

On répète n fois l'expérience de Bernoulli dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.

Tel que $X =$ « le nombre de succès obtenu dans une expérience ».

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ Si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & , \text{ Si non} \end{cases} \quad \text{où :} \quad \begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

La **loi binomiale** comptabilise le nombre d'obtention de k succès, sachant que la probabilité d'un succès est p .

❖ n et p sont les paramètres de cette loi.

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

➤ La probabilité de la loi binomiale

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X distribuée selon une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$, notée $X \sim B(n; p)$, prend la forme suivante :

$$\forall k \in \{0;1;\dots;n\}, P([X = k]) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Proposition :

- L'espérance et la variance de la loi de binomiale sont égales respectivement : $E(X) = np$ et $Var(X) = np(1-p)$
- La fonction génératrice des moments d'une loi binomiale est :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = (q - pe^t)^n$$

Théorème : stabilité additive de la loi binomiale

$$X \rightarrow B(m; p) \quad \text{et} \quad Y \rightarrow B(n; p)$$

$$X + Y \rightarrow B(n+m; p)$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Remarques

➤ Soit X = « le nombre de succès obtenu dans une expérience ».

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ Si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & , \text{ Si non} \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

➤ Soit Y = « le nombre de succès obtenu au cours de n expériences indépendantes ».


$$Y = \sum_{k=1}^n X_k$$

où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli.

Alors Y suit la loi binomiale :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np.q = np(1 - q)$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Exemple :

On lance un dé 5 fois. On s'intéresse au nombre 3 obtenu en total, i.e:

Compter le nombre de fois d'obtention le (numéros 3).

Soit X une variable aléatoire qui désigne la somme des résultats obtenus.

Donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 1/6$. C'est-à-dire :

$$X \sim B(5 ; 1/6)$$

$$\begin{aligned} p = p[X = 3] &= C_5^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{250}{7776} = 0,032. \end{aligned}$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi binomiale négative

- Soient E l'expérience de Bernoulli et A l'événement « succès » de probabilité p .
La probabilité $\bar{A}$ est égale à $q = 1 - p$.
- On répète l'expérience E n fois dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante l'une aux autres.
- Loi **binomiale négative** comptabilise le nombre d'échecs nécessaires avant obtention de n succès, sachant que la probabilité d'un succès est p .
- ❖ n et p sont les paramètres de cette loi.

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi binomiale négative

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X distribuée selon une loi binomiale négative de paramètres n et p , notée $NegBin(n, p)$, prend la forme suivante :

$$P(X = k) = \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k, \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{avec} \quad q = 1 - p$$

Le coefficient binomial est :

$$\binom{k+n-1}{n-1} = c_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = c_{n+k-1}^k = \binom{k+n-1}{k}$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi binomiale négative

Proposition :

- L'espérance et la variance de la loi de binomiale négative sont égales respectivement :

$$E(X) = n \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = n \frac{q}{p^2}$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi binomiale négative

Théorème : somme de deux lois binomiales négatives

La somme de deux lois binomiales négatives de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p) est une loi binomiale négative de paramètre $(n_1 + n_2, p)$.

Si $X \rightarrow \text{NegBin}(n_1; p)$ et $Y \rightarrow \text{NegBin}(n_2; p)$

avec X et Y indépendante, alors

$$X + Y \rightarrow \text{NegBin}(n_1 + n_2, p)$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi binomiale négative

Exemple :

Etant donné un stock de pièces qui contient 5% de pièces défectueuses. On prélève avec remise une pièce. Quelle est la probabilité dans les cas suivants:

- On fait 20 tirages pour obtenir 2 pièces non défectueuses
- On fait 15 tirages pour obtenir 3 pièces non défectueuses

Soit X le nombre de prélèvements nécessaires pour obtenir deux pièces non défectueuses. Alors on a:

● $P(X = 20) = C_{19}^1 (0.9)^2 \times (0.1)^{18}$

● $P(X = 15) = C_{14}^2 (0.9)^3 \times (0.1)^{12}$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Géométrique

- Soient **E** l'expérience de Bernoulli et **A** l'événement « succès » de probabilité **p**.

La probabilité $\bar{A}$ est égale à **q = 1-p**.

- On répète l'expérience **E** **n fois** dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.
- Soit **X** = « le nombre d'expérience **E** avant l'obtention de l'événement **A** pour la première fois ».

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Géométrique

- $p[X = k]$ représente la probabilité que l'événement A se produise pour la première fois durant la $k^{\text{ème}}$ expérience.
- Les $(k-1)$ expériences précédentes ont pour résultat l'événement contraire $\bar{A}$.
- Comme les expériences sont indépendantes, alors $p[X = k] = q^{k-1}p$

On écrit $X \rightarrow G(p)$

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Géométrique

Exemple :

On lance un dé plusieurs fois jusqu'à l'apparition de la face N°1. Quelle est la probabilité d'obtenir la face N°1 pour la première fois au 20^{ème} lancer.

Soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face N°1 pour la première fois.

On a : $A = \{1\}$ et $\bar{A} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Alors $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{A}) = \frac{5}{6}$ Donc:

$$p[X = 20] = p\left(\underbrace{\bar{A} \text{ et } \bar{A} \text{ et } \dots \text{ et } \bar{A}}_{19. \text{ fois}}; \text{ et } A\right) = \underbrace{p(\bar{A}) \times p(\bar{A}) \times \dots \times p(\bar{A})}_{19. \text{ fois}} \times p(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^{19} \times \frac{1}{6}$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Hypergéométrique

- ❑ Soit une urne qui contient N boules composées de:
 - N_1 boules d'une couleur donnée, (la couleur noire par exemple)
 - N_2 boules d'autres couleurs, (autre couleur que la noire).
- ❑ On fait n tirages sans remise à partir de cette urne.
- ❑ Soit X la variable aléatoire qui désigne «Le nombre de boules noires obtenues».

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Hypergéométrique

X suit la loi Hypergéométrique de paramètres: N, n et $p = \frac{N_1}{N}$.

Ainsi la probabilité de tirer k boules données est égale à:

$$p[X = k] = \frac{C_{N_1}^k \cdot C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$$

On écrit $X \rightarrow H(N, n, p)$

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = n p$
- $V(X) = \frac{N-n}{N-1} npq$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Hypergéométrique

Exemple :

Soit une urne qui contient 2 boules blanches et 1 boule noire. On tire une boule 2 fois sans remise. La probabilité d'obtenir 2 boules blanches est égale à:

$$p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_1^0}{C_3^2} = \frac{1}{3}$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Poisson

➤ La loi de Poisson est utilisée lorsque il s'agit d'étude d'un phénomène durant un laps infiniment petit. Elle est utilisée aussi dans les phénomènes d'attentes , les contrôles de qualité et en assurance.

➤ Une variable aléatoire discrète X suit **une loi de Poisson** si : $p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

où λ est un paramètre positif. On écrit $X \sim P(\lambda)$.

Les propriétés de X sont :

● $E(X) = \lambda$

● $V(X) = \lambda$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Poisson

Exemple :

Soit X le nombre des arrivées des clients à un guichet bancaire.

Supposons que X suit la loi de Poisson de paramètre 4.

Calculer les probabilités suivantes :

- a) aucun client n'arrive au guichet,
- b) plus de 2 clients arrivent au guichet,
- c) entre 3 et 7 clients arrivent au guichet.

a)
$$p\{X = 0\} = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = e^{-4} = 0,018$$

Chapitre 3 : Variable aléatoire discrète

6. Lois Discrètes Usuelles : Loi Poisson

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad p\{X \geq 3\} &= 1 - p[X \leq 2] \\ &= 1 - [p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2]] \\ &= 0,762 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad p\{3 \leq X \leq 7\} &= p[X = 3] + p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] + p[X = 7] \\ &= 0,711 \end{aligned}$$

Chapitre 4

Variables Aléatoires Continues

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

1. Fonction de densité

Définition :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F .

La variable X est dite continue s'il existe une fonction positive f telle que :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction f est appelé **densité de probabilité** de X .

F est une fonction positive, croissante, telle que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

1. Fonction de densité

Propriétés :

La fonction de densité de probabilité de X vérifie les conditions suivantes :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$
- Si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$

Remarque : La fonction de densité de probabilité f est appelée aussi la loi de X .

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

Exemple :

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une fonction de densité de probabilité
2. Calculer la fonction de répartition
3. Représenter le graphique de f et de F
4. Calculer $P(0,5 \leq X \leq 0,7)$
5. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$ à l'aide de $M_X(t)$

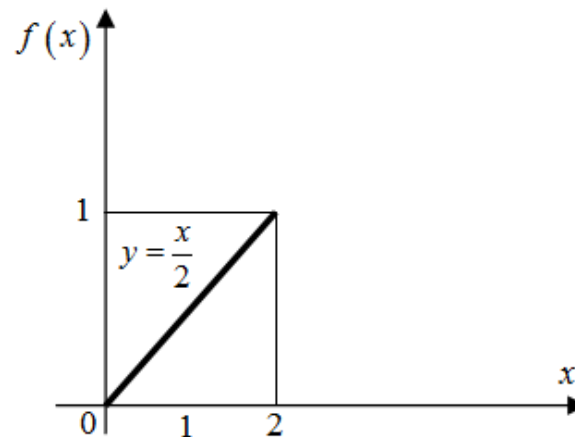
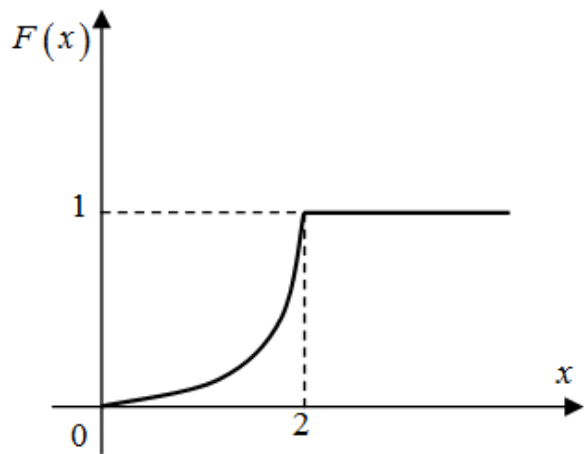
Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

Exemple: Solution

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^{+\infty} 0dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{2} - 0 \right] = 1.$$

$$2) F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$$
$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

3)



Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

2. L'espérance mathématique et la variance

L'espérance mathématique

L'espérance mathématique ou l'espérance d'une variable aléatoire continue, notée $E(X)$, est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

La variance

La variance d'une variable aléatoire continue X , notée $V(X)$, est définie par :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

où:
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

Exemple

4)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

et

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^2 x^2 f(x) dx - \left(\frac{16}{9} \right) \\ &= \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} \\ &= \frac{18-16}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

2. L'espérance mathématique et la variance

Propriétés

Soient a et b deux constantes ; X et Y deux variables aléatoires continues

- $E(a) = a$ et $V(a) = 0$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

3. Moments d'ordre supérieur

➤ Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k , i.e:

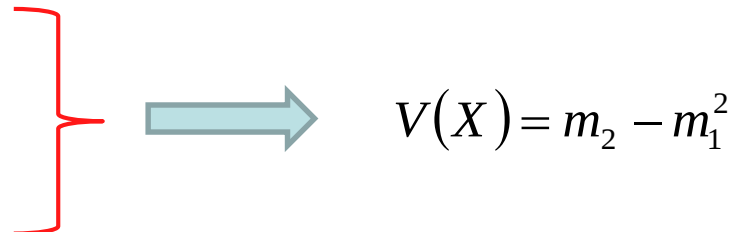
$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

➤ Le moment centré d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k , i.e:

$$m'_k = E(X - E(X))^k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^k f(x) dx$$

➤ Le moment d'ordre 1 : $m_1 = E(X)$

➤ Le moment d'ordre 2 : $m_2 = E(X^2)$

 $V(X) = m_2 - m_1^2$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

3. Moments d'ordre supérieur

- La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X est la fonction :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

- Sachant que : $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$



$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!} = \frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \dots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \dots$$

- Alors: $M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \dots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \dots\right)$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) = \frac{t}{1!} E(X) + \frac{t^2}{2!} E(X^2) + \dots + \frac{t^n}{n!} E(X^n) + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} m_k = \frac{t}{1!} m_1 + \frac{t^2}{2!} m_2 + \dots + \frac{t^n}{n!} m_n + \dots$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi Uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $X \sim U(a, b)$

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \frac{(a+b)}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi Uniforme

Exemple:

Soit une personne en attente à la gare de bus, lequel arrive chaque 60 min. Ladite personne ne dispose d'aucune information ni sur l'heure du dernier bus ni sur l'heure du prochain.

Calculer la probabilité pour que cette personne reste en attente entre 15 et 30 min.

Soit X le temps d'attente en min de cette personne. On admet que $X \sim U(0, 60)$. On a:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & \text{si } 0 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors:

$$P(15 \leq X \leq 30) = \int_{15}^{30} f(x) dx = \frac{1}{60} [x]_{15}^{30} = \frac{15}{60} = 0.25$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi normale

La loi normale est la loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance, un nombre réel noté μ , et son écart type, un nombre réel positif noté σ . Notée : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

La densité de probabilité est donnée par la fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Fonction de répartition :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} dt$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi normale

L'espérance et la variance de X sont données respectivement par :

$$E[X] = \mu \quad \text{et} \quad \sigma^2[X] = \sigma^2$$

La Fonction génératrice des moments

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi normale

Loi normale centrée réduite

Si $X \sim N(m, \sigma)$

Alors
$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}\right), \text{ avec } Y = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1)$$
$$= P\left(Y \leq \frac{x - m}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

La valeur de ϕ est déterminée à partir de la table normale

Si $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ alors Y est appelée la loi normale centrée réduite.

On écrit $Y \sim N(0,1)$

On a $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ et $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

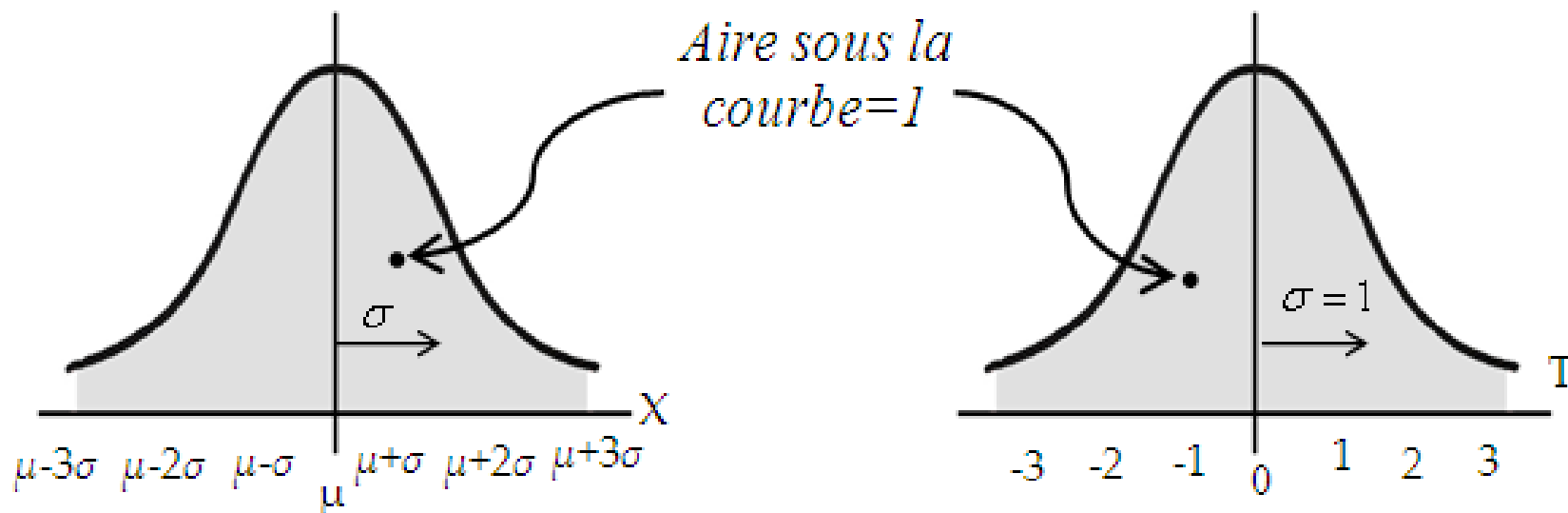
4. Lois continues usuelles : Loi normale

Paramètres : $E(X) = \mu$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Paramètres : $E(T) = 0$

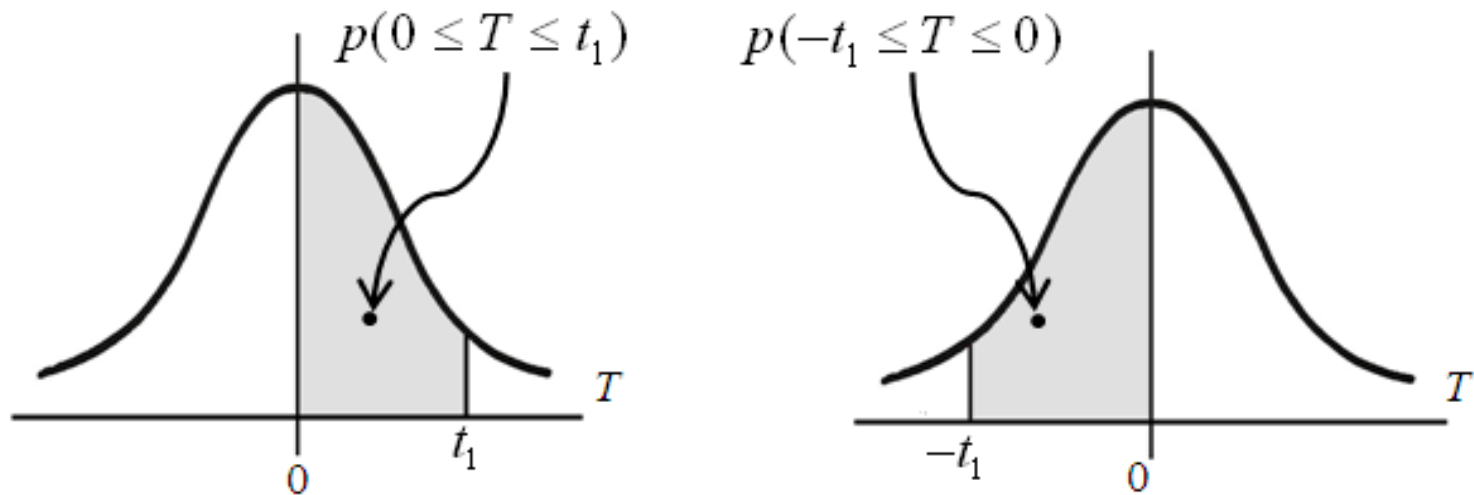
$$Var(T) = 1$$



Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi normale

Calcul des probabilités avec la loi normale centrée réduite»

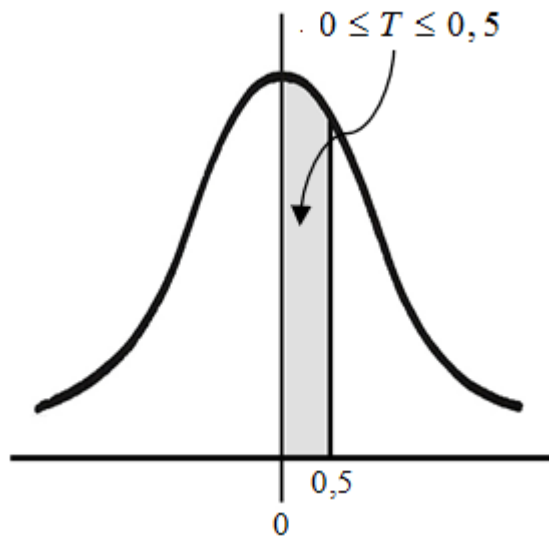


On a:
$$p(0 \leq T \leq t_1) = p(0 < T < t_1)$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi normale

Exemple: Calcul de $p(0 \leq T \leq 0,5)$ par l'utilisation de la table de la loi Normale



t	0,00	0,01	0,02
0	0,0000	0,0040	0,0080
0,1	0,0398	0,0438	0,0478
0,2	0,0793	0,0832	0,0871
0,3	0,1179	0,1217	0,1255
0,4	0,1554	0,1591	0,1628
0,5	0,1915	0,195	0,1985
0,6	0,2257	0,2291	0,2324
0,7	0,258	0,2611	0,2642
0,8	0,2881	0,291	0,2939
0,9	0,3159	0,3186	0,3212

- pour $T=0,50$ on lit directement de la table, 0,1915
- pour $T=0,51$ on lit directement de la table, 0,195

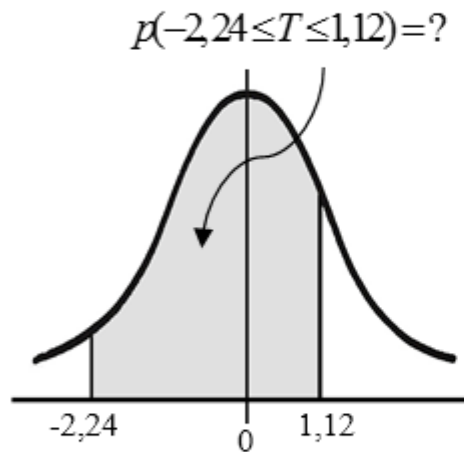
$$p(0 \leq T \leq 0,5) = p(0,5) - p(0) = 0,1915 - 0,000 = 0,1915$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi normale

Exemple de Calcul : Entre

$T = -2,24$ et $T = 1,12$



à $T=1,12$ correspond **0,3686**

➡ $p(0 \leq T \leq 1,12) = 0,3686$

à $T=2,24$ correspond **0,4875**

➡ $p(-2,24 \leq T \leq 0) = p(0 \leq T \leq 2,24) = 0,4875$

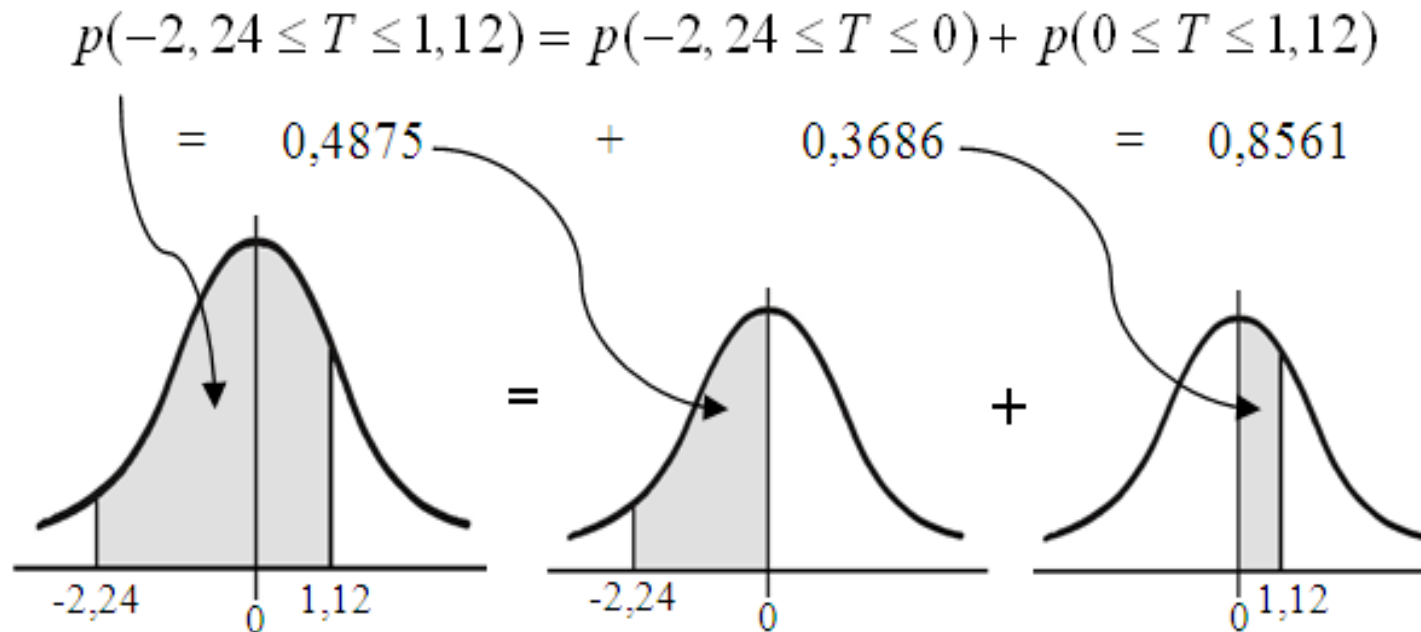
t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838
2,2	0,4866	0,4868	0,4870	0,4871	0,4875

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi normale

Exemple de Calcul : Entre $T = -2,24$ et $T = 1,12$

Donc on aura :



Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Notée $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

La fonction de répartition et de survie sont respectivement données par :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{et} \quad S_X(x) = e^{-\lambda x}$$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi exponentielle

- L'espérance : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et la variance : $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
- La fonction génératrice est donnée par :

$$\phi_{\lambda}(t) = E[e^{tx}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

- La somme de variables aléatoires **exponentielles** indépendantes est une variable aléatoire qui suit une loi **Gamma** .

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi de Khi-deux

➤ Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:

● $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \dots, n$

● $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j (i, j = 1, \dots, n)$

➤ La variable aléatoire X définie par : $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$

Suit la loi de Khi-deux à n degré de liberté, on écrit $X \rightarrow \chi^2(n)$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi de Student

- Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:

$$X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j (i, j = 1, \dots, n)$$

- Soit Y une variable aléatoires normale centrée réduite et indépendante de $X_1, X_2, \dots, X_n$. i.e:

$$Y \sim N(0,1) \quad \text{et} \quad \text{Cov}(Y, X_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

- La variable aléatoire T définie par : $T = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$ où $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$

suit la loi de Student à n degrés de liberté. On écrit $T \rightarrow t_n$

Chapitre 4 : Variables aléatoires continues

4. Lois continues usuelles : Loi de Fisher

➤ Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ et $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ deux suites de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:

● $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \dots, n$ et $Y_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \dots, m$

● $Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j (i, j = 1, \dots, n)$ et $Cov(Y_i, Y_j) = 0, \forall i \neq j (i, j = 1, \dots, m)$

➤ La variable aléatoire F définie par:

$$F = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i^2} = \frac{\frac{1}{n} X}{\frac{1}{m} Y} \quad \text{où} \quad X \sim \chi_n^2 \quad \text{et} \quad Y \sim \chi_m^2$$

suit la loi de Fisher à n et m degrés de liberté. On écrit $F \rightarrow F_{n,m}$