Cours de Probabilités
Fondements

Abdelhak YAACOUBI
Département de Statistique et de Mathématiques
Appliquées à l'Économie et à la Gestion

Université Hassan II de Casablanca

FSJES AIN SEBAA

19 mars 2020

Objectifs du cours

1. **Acquérir les bases mathématiques de la théorie des probabilités.**
2. **Savoir résoudre des problèmes nécessitant l'usage des probabilités**
3. **Identifier et manipuler les lois de probabilités discrètes et continues usuelles**

Plan de cours

1. Dénombrement
   - Arrangement sans répétition
   - Arrangement avec répétitions
   - Permutations sans répétition
   - Permutations avec répétition
   - Combinaisons sans répétition

2. Théorie des ensembles
   - Opérartions sur les ensembles

3. Calcul de probabilités
   - Evénements aléatoires
   - Equiprobabilité
   - Mesure de probabilté : Cas général

Exemple introductif

Exemple

1. *Avec les lettres du mot AMPHI, combien de mots différents de trois lettres peut on former ?*
2. *Combien de drapeaux de trois couleurs peut-on créer avec 8 couleurs différentes.*
3. *Combien y a-t-il d'arrivées différentes pour un tiercé avec 12 partants ?*

Solution :

$$A \quad M \quad I \quad \text{ou bien} \quad P \quad H \quad I$$

$$M \quad A \quad I \quad \text{ou bien} \quad M \quad H \quad P$$

Nombre de possibilités

5	4	3

Nombre d'arragements Sans répititions

Proposition

Le nombre des arrangements sans répétition de p éléments pris parmi $1 \leq p \leq n$*, est :*

$$A_n^p = n \times (n-1) \times ...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!};$$

où on utilise la convention $0! = 1$.

Exercice

Pour accéder à un service sur internet, vous devez taper un mot de passe de 8 caractères (lettres ou chiffres)

1. Combien de mots de passe de 8 lettres distinctes peut-on créer ?
2. Combien de mots de 8 caractères peut-on créer si le mot commence par un chiffre ?
3. Combien de mots de passe de 8 lettres peut-on créer ?

Arrangement avec répétitions

Definition

Un arrangement avec répétitions de p éléments pris parmi n, est une liste de p éléments dans l'ordre avec répétitions.

Exemple

Un code pin de téléphone portable est un arrangement de 4 chiffres pris dans l'ensemble

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Comme on tient compte de l'ordre et les répétitions sont autorisées, alors le premier chiffre dans le code pin est à choisir parmi 10 chiffres, le deuxième parmi 10, et de même pour le troisième et quatrième chiffres.
Alors le nombre de codes-pin qu'on peut construire avec les dix chiffres, est 10^4.

Arrangement avec répétitions

Proposition

Le nombre de p-listes prises parmi n objets dans l'ordre et avec répétitions est n^p. *[Nombre d'objets à la puissance nombre des éléments de la liste]*

Exemple

Les codes de carte bancaire sont en 4 chiffres. Le nombre de code bancaires possibles est 10^4.

Permutations sans répétition

Definition

Une permutation est un arrangement de n objets distincts parmi n.
Le nombre de permutations de n objets tous distincts est $n!$. C'est exactement A_n^n.

Exemple

1. *Le nombre d'anagrammes du mot AMPHI est* $5!$.
2. *le nombre de dispositions de 4 étudiants sur une rangé d'amphi est* $4!$.

Permutations avec répétition

Proposition

Le nombre de permutations rectilignes de n objets dont certain objets sont identiques est :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times n_4! \times ... \times n_k!}.$$

Exemple

1. *Le nombre d'anagrammes du mot ECONOMIE est*

$$\frac{8!}{2! \times 2!}$$

2. *Le nombre d'anagrammes du mot STATISTIQUES est*

$$\frac{12!}{3! \times 3! \times 2!}.$$

3. *Le nombre de permutations des chiffres 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 est*

$$\frac{10!}{4! \times 2! \times 3!}.$$

Combinaisons sans répétition

Definition

Soient $E = \{e_1, ..., e_N\}$ un ensemble à n éléments et soit $p \leq n$. Une combinaison sans répétition de p éléments de E est une partie (sous-ensemble) de E ayant p éléments.

Exemple

Soit $E = \{a, b, c\}$, *et* $p = 2$. *Les combinaisons de deux éléments de* E *sont les parties* $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ *et* $\{c, a\}$.

Il est essentiel à savoir que :

- Dans une partie, les éléments sont deux à deux distincts.
- Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales.
  Ainsi $\{a, b\} = \{b; a\}$. (L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance)

Combinaisons sans répétition

Proposition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Exemple

- *Le nombre de comités différents de 5 personnes dans une association de 20 personnes est C_{20}^5 ?*
- *Combien de sous ensembles de 5 éléments peut former avec 20 éléments ?*

Coefficients binomiaux

Les coefficients C_n^p sont encore appelés coefficient binomiaux. Ils peuvent être calculés seulement si $p \leq n$.

Propriétés

1. Si p est strictement supérieur à n, on convient que dans ce cas $C_n^p = 0$.
2. **Symétrie :** Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$C_n^{n-p} = C_n^p$$

Conséquence : $C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad \text{et} \qquad C_n^{n-1} = C_n^1 = n$

3. **Relation de Pascal**

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

La raison pour laquelle ces coefficients sont appelés coefficients binomiaux est qu'ils apparaisent dans la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Inclusion

Un ensemble est défini soit par une liste de ses éléments, soit par une règle qui définit les éléments de l'ensemble.

Exemple

$A = \{1, 2, 3\}$ *signifie que l'ensemble* A *contient les éléments* $1, 2$ *et* 3*.*
$B = \{x : x \text{ est un entier naturel impair}\}$ *signifie que l'ensemble* B *contient tous les nombres entiers naturels impairs, a savoir* 1, 3,..., 15, *17, etc.*

Definition

On dit que A est inclus dans B, et on écrit $A \subset B$, si tout élément de A appartient à B.

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, *alors* $A \subset B$*.*

Réunion de deux ensembles

Definition

La réunion de deux ensembles A et B est le nouvel ensemble consistant en la réunion des éléments de A et des éléments de B. La réunion de A et B, notée $A \cup B$, qui se lit A union B est définie comme suit :

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Le terme "ou" est employé ici dans le sens de et/ou. En effet si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cup B$.

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{2, 3, 5, 8\}$ *alors* $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$. *On notera que l'élément* 3 *qui se trouve dans* A *et dans* B *n'est pas répété dans* A *et* B.

Intersection, difference et différence symétrique de deux ensembles

Definition

L'intersection de deux ensembles A et B est le nouvel ensemble formé des éléments communs à A et B. L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est définie par :

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Exemple

1. *Si* $A = \{1, 2, 3, 9\}$ *et* $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$, *alors* $A \cap B = \{3, 9\}$.
2. *Si* $A =$ *{L'ensemble des multiples de 3}, et* $B =$ *{L'ensemble des multiples de 2}, alors* $A \cap B =$*{L'ensemble des multiples de* 6*}.*

Definition

La différence entre deux ensembles A et B est le nouvel ensemble formé des éléments qui appartiennent à B mais pas à A. La différence entre B et A, notée $B \setminus A$, est définie par :

$$B \setminus A = \{x : \ x \ \in B \text{ et } x \notin A\}.$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{1, 2, 3, 8, 77\}$, *alors* $B \setminus A = \{8, 77\}$.

Definition

La différence symétrique entre deux ensembles A et B est le nouvel ensemble formé des éléments qui appartiennent à un et un seul des deux ensemble A et B. La différence symétrique de A et B, notée $A\Delta BA$, est définie par :

$$A\Delta B = \{x : \ (x \ \in A \ et \ x \notin B) ou (x \ \in B \ et \ x \notin A)\}.$$

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exemple

$Si\ A = \{1, 2, 3, 4\}\ et\ B = \{1, 2, 3, 8, 77\},\ alors\ A\Delta B = \{4, 8, 77\}.$

Notion de complémentaire

Definition

Le complémentaire d'un ensemble A est le nouvel ensemble formé des éléments qui n'appartiennent pas à A. Le complémentaire de A, note $\overline{A}$, est défini par :
$\overline{A} = \{x : \ x \in \Omega \ et \ \ x \notin A.\}$

Exemple : Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ et $A = \{1, 2, 3, 8\}$ un sous ensemble de Ω. Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble $\overline{A} = \{5, 6, 9\}$

Proposition

Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble Ω, alors :

1. $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *et cet ensemble est noté* $A \cap B \cap C$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *et cet ensemble est noté* $A \cup B \cup C$.
4. $A \cup \emptyset = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $\overline{\overline{A}} = A$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Definition

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F, l'ensemble des couples ordonnes (x, y) ou $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$ et on lit "E croix F".

$$E \times F = \{(x, y) : \quad x \in E \quad \text{et} \quad y \in F\}$$

Remarque

1) Les éléments (x, y) sont des couples ordonnés et non des ensembles.

2) L'ordre dans lequel on écrit x et y est important. Le premier élément x du couple appartient au premier ensemble et le deuxième élément au deuxième ensemble.

Exemple

1. *Soient* $A = \{1, 2\}$ *et* $B = \{4, 7, 8, 17\}$, *alors*

$$A \times B = \{(1, 4); (1, 7); (1, 8); (1, 17); (2, 4); (2, 7); (2, 8); (2, 17)\}$$

2. *Une société propose des chemises en deux couleurs "B=Blanche" et "V=Verte", et trois tailles "S=Small", "M=Medium" et "L=Large". Soit* $A = \{B, V\}$ *l'ensemble des couleurs et* $B = \{S, M, L\}$ *celui des tailles. Les choix possibles qu'un clients a sont les suivants*

$$A \times B = \{(B, S); (B, M); (B, L); (V, S); (V, M); (V, L)\}.$$

Définition

On appellera expérience aléatoire toute action ou processus dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

Exemple

- *Lancer d'une pièce de monnaie*
- *Jet d'un ou plusieurs dés*
- *durée d'attente dans un supermarché.*
- *Nombre de pièces défectueuses dans un lot.*

Ensemble fondamental

Définition

L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers ou ensemble fondamental, ses éléments sont les possibles.

Exemple

- *On lance une pièce de monnaie, les résultats possibles sont* P, F*, alors on prendra* $\Omega = \{P, F\}$.
- *Si on lance un dé, alors les résultats possibles sont* $1, 2, 3, 4, 5, 6$*, donc on prendra* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Dans un lot de 1500 pièces, le nombre de pièces défectueuses peut être* $0, 1, ..., 1500$*, alors* $\Omega = \{0, 1, ..., 1500\}$.

Dans ce chapitre on se restreint au cas où Ω est au plus dénombrable (Ω est en bijection avec $\mathbb{N}$). Ω peut être écrit sous la forme

$$\Omega = \{\omega_i, \quad i \in I \subset \mathbb{N}\}.$$

Evénement relatif à une expérience aléatoire (1)

Définition

Un événement est une éventualité susceptible d'être réalisée lors de l'épreuve, sa réalisation dépendant du hasard.

Exemple

On effectue 3 tirages avec remise dans une urne contenant deux boules vertes et une boule blanche. Dans ce cas :

$$\Omega = \{v, b\}^3 = \{(v, v, v), (v, v, b), (v, b, b), ...\}$$

L'événement A " les boules tirées sont blanches " peut être décrit par :

$$A = \{(b, b, b)\}$$

L'événement B " la première boule tirée est blanche " peut être décrit par :

$$B = \{(b, v, b), (b, v, v), (b, b, v), (b, b, b)\}$$

Evénement relatif à une expérience aléatoire (2)

Un événement A est dit réalisé si le résultat de l'expérience appartient à A.

Exemple

On lance un dé cubic, l'événement $A = \{1, 2, 6\}$ *est réalisé si le dé affiche : 1,2 ou 6.*

1. L'événement impossible n'est jamais réalisé quel que soit le résultat obtenu. On lui associe l'ensemble vide noté $\emptyset$.
2. L'événement certain est toujours réalisé quel que soit le résultat obtenu. On lui associe l'ensemble fondamental Ω.
3. Les événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser simultanément. On a $A \cap B = \emptyset$.
   Exemple : $A = \{1, 3, 5\}$, le numéro affiché est impaire et $B = \{2, 4, 6\}$ le résultat est paire ne peuvent pas se réaliser en même temps.
4. L'événement contraire d'un événement A est l'événement constitué par le complémentaire de A dans E.
   Par exemple, les événements A="obtenir un chiffre pair"$=\{2, 4, 6\}$ et B="obtenir un chiffre impair"$=\{1, 3, 5\}$ sont contraires.

Opérations sur les événements

Proposition

- $A \cap B$ est réalisé si A et B sont tous les deux réalisés.
- $A \cup B$ est réalisé si A réalisé ou B est réalisé.
- $A \cap \overline{B}$ est réalisé si A est réalisé mais pas B

Exemple

On lance un dé à six faces, et on considère les événements

- A *" Avoir un nombre paire"*$=\{2, 4, 6\}$
- B *" Avoir un nombre impaire"*$=\{1, 3, 5\}$
- C *" Avoir un nombre plus petit ou égal à 3"*$= \{1, 2, 3\}$

Alors

1. $A \cap B = \emptyset$ *car c'est impossible d'avoir à la fois un nombre paire et impaire*
2. $A \cup B = \Omega$ *évenement certain.*
3. $A \cap \overline{C} = \{4, 6\}$ *alors A est réalisé mais pas C*

Opérations sur les événements (2)

Exercice :

Soient A ;B ;C trois événements. Exprimer à l'aide des opérations ensemblistes les événements ci-dessous :

1. A seul se produit. Solution : $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
2. A et C se produisent, mais non B. Solution : $A \cap C \cap \overline{B}$
3. Les trois événements se produisent. Solution : $A \cap C \cap B$
4. L'un au moins des événements se produit. Solution : $A \cup B \cup C$
5. Deux événements au moins se produisent.
   Solution : $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \cup (A \cap C \cap B)$
6. Un événement au plus se produit. Solution :
   $(A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
7. Aucun des trois événements ne se produit. Solution : $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
8. Exactement deux événements se produisent.
   Solution : $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$
9. Pas plus de deux événements se produisent. Solution : $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Résumé

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Système complet d'événements

Définition

On appelle système complet d'événements tous les ensembles $A_1, ..., A_n$ d'événements deux à deux incompatibles, et dont la réunion fait Ω. Autrement dit, $A_1, ..., A_n$ est un système complet d'événements si, et seulement si

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n = \Omega$

Exemple

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, les événements $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{4\}$ et $C = \{3, 6\}$ constituent système complet d'événements. En effet,

- $A \cap B = \emptyset$*,* $B \cap C = \emptyset$ *et* $A \cap C = \emptyset$*.*
- $A \cup B \cup C = \Omega$

Exercice : Vérifiez que

- Pour tout événement A, les ensembles A et $\overline{A}$ (son événement contraire), constituent un système complet d'événements.
- $A = \{2, 4\}$ et $B = \{4, 5\}$ n'est pas un système complet d'événements.
- $\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 4, 5, 6\}$ n'est pas un système complet d'événements.

Cas d'équiprobabilité (1)

On dit qu'on aie en situation d'équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de réalisation. Plus précisément

Définition

Si $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est fini et si pour tout e_i, $P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$ alors on dit que P est la probabilité uniforme sur Ω et que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Exemple : On lance un dé équilibré, alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Proposition

Soit Ω fini et P la probabilité uniforme sur Ω, alors pour tout événement A on a,

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

Autrement dit : Sous la probabilité uniforme, la probabilité d'un événement correspond au nombre de cas favorables (i.e. le cardinal de l'événement) divisé par le nombre de cas possibles (i.e. le cardinal de Ω).

Cas d'équiprobabilité (2)

Exemples :

1. On lance un dé équilibré, la probabilité d'avoir un nombre paire est :

$$P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. On lance une pièce de monnaie trois fois, l'ensemble des possibilités est :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

(a) Soit A l'événement, "avoir deux faces".

$$Card(A) = \frac{\text{Nombre total de lettres factoriel}}{\text{Nombre de lettres qui se répètent factoriel}} = \frac{3!}{2!},$$

C'est le nombre de permutations avec répétitions de FFP.
D'autre part, il suffit d'utiliser le principe fondamentale du dénombrement (règle du produit) $Card(\Omega) = 8$. En effet, nous avons des mots à trois lettres, ou chaque lettre est choisie parmi deux : P et F, alors le nombre de mots est $2 \times 2 \times 2$. En conséquence

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

(b) De la même manière, on peut calculer la probabilité d'avoir au moins une face

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{avoir au moins une face }) \\ = \quad & \mathbb{P}(\text{avoir une face et deux piles }) + \mathbb{P}(\text{avoir deux face et un pile}) + \mathbb{P}(\text{avoir trois face }) \\ = \quad & \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Définition d'une probabilité

Proposition

On appelle probabilité, toute application :

$$\mathbb{P} \; : \; \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1],$$

possédant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1,$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, *si* A *et* B *sont incompatibles* $(A \cap B = \emptyset)$.

Ainsi à tout événement $A \subset \Omega$, *on associe le nombre* $\mathbb{P}(A)$, *avec*

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

Remarque : L'événement impossible est de probabilité nulle. En effet,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

et comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, alors

$$1 = 1 + \mathbb{P}(\emptyset),$$

par suite $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Propriétés d'une probabilité

Propriétés très importantes

1. Soit A un événement et $\overline{A}$ son événement contraire, alors nous avons
$$P(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.

Exercice

Soient A et B deux événements tels que :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{7}, \quad \mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{5} \quad \textit{et } \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$$
Calculez $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Solution :

- $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - 1/5 = 4/5$.
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$ par suite
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

Propriétés d'une probabilité

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{7} + \dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{56}$
- $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, alors

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B)$$

système complet d'événements (1)

Proposition

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements (une partition) de Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap A_1) + \mathbb{P}(A \cap A_2) + ... + \mathbb{P}(A \cap A_n). \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_j).\end{aligned}$$

Exemple

Dans une urne, on a des cubes et des boules rouges et verts. On tire un des ces objets : Soit C="L'objet tiré est un cube" et B="L'objet tiré est une boule". Alors (C, B) est un système complet d'événements.

On note V, l'événement, l'objet tiré est vert. Pour calculer P(V) ; il suffit de calculer la probabilité que l'objet tiré soit un **cube** vert, et ajouter la probabilité que l'objet soit une **boule** verte.

On peut éventuellement écrire :

$$P(V) = P(V \cap C) + P(V \cap B).$$

Probabilités conditionnelles (1)

Exemple

On lance un dé cubic à 6 faces, alors la probabilité d'obtenir $\{4\}$ est $1/6$. Supposons qu'on sache que le chiffre affiché est pair. Intuitivement, la probabilité d'obtenir 4 sachant que le résultat est pair est $1/3$

Ainsi une information partielle sur le résultat d'une experience aléatoire modifie les probabilités d'événements.

Définition

Si P est une probabilité sur Ω et B un événement tel que $P(B) > 0$, la probabilité d'un événement A conditionnée par B est définie par

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilités conditionnelles (2)

Proposition

L'application $P(./B)$ est une probabilité sur Ω.

En effet : $P(./\Omega)$ est à valeurs dans $[0,1]$ car $P(A \cap B) \leq P(B)$. De plus

$$P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

D'autre part : Si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints (incompatibles)

$$\begin{aligned} P\left(\cup_{i\in I} A_i/B\right) &= \frac{P\left(\cup_{i\in I} A_i \cap B\right)}{P(B)} \\ &= \frac{P\left(\cup_{i\in I}(A_i \cap B)\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i\in I} P\left((A_i \cap B)\right)}{P(B)} \\ &= \sum_{i\in I} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{i\in I} P(A_i/B) \end{aligned}$$

Probabilités conditionnelles

Parmi les 100 employés d'une entreprise

- Il y a 60 hommes, on note H, l'événement " être homme"
- 50 diplomés, on note D, l'événement " être diplômé"
- 40 hommes diplômés, on note $H \cap D$, l'événement " être homme et diplômé"

On pose sur la population donnée une question du type " Parmi les employés hommes, quel est le pourcentage des diplômés ?"

Nous avons 60 hommes, est le nombre d'hommes diplômés est 40, alors le pourcentage de diplômés parmi les hommes est

$$\frac{40}{60} = \frac{Card(H \cap D)}{Card(H)} = \frac{\frac{Card(H\cap D)}{100}}{\frac{Card(H)}{100}} = \frac{\frac{Card(H\cap D)}{Card(\Omega)}}{\frac{Card(H)}{Card(\Omega)}} = \frac{\mathbb{P}(H \cap D)}{\mathbb{P}(H)}$$

Définition

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $\mathbb{P}(A/B)$, la possibilité de réalisation de A sachant que B a été réalisé. Elle est donnée par la formule suivante

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Cette formule est dite **Première formule de Bayes**

Formule des probabilités totales

Proposition

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements de Ω tel que $\mathbb{P}(A_j) \neq 0$, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration : Comme $A_1, A_2, ..., A_n$ est un système complet d'événements de Ω, alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + ... + \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Utilisons la formule de Bayes, $\mathbb{P}(B \cap A_j) = \mathbb{P}(B/A_j) \times \mathbb{P}(A_j)$, alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n).$$

Formule des probabilités totales

Exemple : On considère les événements A, B et C, tel que

- $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$.
- $\mathbb{P}(A) = 0,2$, et $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(C) = 0,5$.

Soit D un événement tel que $\mathbb{P}(D/A) = 0,3$, $\mathbb{P}(D/B) = 0,2$, $\mathbb{P}(D/C) = 0,4$.
Question : Quelle est la probabilité de réalisation de D ?
Solution : **Etape 1 :** Comme A, B et C sont deux à deux disjoints, et

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1,$$

alors les événements A, B et C constituent un système complet d'événements.
Etape 2 : En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D/A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D/B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D/C) \times \mathbb{P}(C). \\ &= 0,3 \times 0,2 + 0,2 \times 0,3 + 0,4 \times 0,5 \end{aligned}$$

Deuxième formule de Bayes

Proposition

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements de Ω tel que $\mathbb{P}(A_j) \neq 0$, pour tous $k \in \{1, ..., n\}$. Alors pour tout événement B, tel que $\mathbb{P}(B)$, nous avons

$$\mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n)}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i/B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}, \\
&= \frac{\mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(B/A_n) \times \mathbb{P}(A_n)}
\end{aligned}$$

où la dernière étape découle de la formule des probabilités totales.

Exercices

Exercice

Le gérant d'un magasin informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boîtes sont abimées. Le gérant estime que :

a) 60% des boîtes abimées contiennent un CD-ROM défectueux.

b) 98% des boîtes non abimées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'évenement : "la boite est abimée" et par D l'événement "la boite achetée contient CD-ROM défectueux".

1. Donner les probabilités de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}(D|A)$, $\mathbb{P}(D|\overline{A})$, $P(\overline{D}|A)$ et $P(\overline{D}|\overline{A})$.
2. Le client constate qu'un des CD-ROM achèté est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée.

Solution :

(*) $\mathbb{P}(A) = 0,05$ car 5% des boites sont abimées. En conlusion,
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,95$

(**) $P(D/A) = 0,6$ (Si la boite est abimée, alors elle a 60 % de chance de contenir un CD défecteux). En conclusion :
$P(\overline{D}/A) = 1 - P(D/A) = 0,4$

(***) $P(\overline{D}/\overline{A}) = 0,98$ (Si la boite n'est pas abimée, alors elle a 98 % de chance de ne contenir aucun CD défecteux). En conclusion :
$P(D/\overline{A}) = 1 - P(\overline{D}/\overline{A}) = 0,02$

Exercices

Exercice

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage :

- Si une personne est malade, le test est positif à 99%.
- Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0, 1%.

Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Solution :

$$\begin{aligned} (*) \quad & \mathbb{P}(M) = 0,001 \\ (**) \quad & P(+/M) = 0,99 \\ (***) \quad & P(+/\overline{M}) = 0,001 \end{aligned}$$

Exercices

Dans l'entrepôt d'une certaine usine de fabrication de clous,

i) 50% des clous sont fabriqués par la machine I ;

ii) 30% sont fabriqués par la machine II ;

iii) 20% par la machine III.

1. Parmi les clous fabriqués par la machine I, 3% sont défectueux.
2. Parmi ceux fabriqués par la machine II, 5% sont défectueux
3. et parmi ceux fabriqués par la machine III, 8% sont défectueux.

Si on obtient un clou choisi au hasard dans l'entrepôt de cette usine, quelle est la probabilité que ce clou soit défectueux ?

Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Exemple

On lance un dé deux fois. Les événements suivants sont ils indépendants ? :

- *A : "obtenir un 5 au premier lancer"*
- *B :" obtenir un 3 au deuxiéme lancer"*

Définition

Les événements A, B, C sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

Contre exemple

Exemple

On lance une pièce de monnaie á deux reprises.
Considérons les événement suivants :

- *A : "obtenir P au prmier lancer"*
- *B : "obtenir P au deuxième lancer"*
- *C : "obtenir deux résultats identiques"*

*Ces événements sont **mutuellements indépendants** mais ne sont pas indépendants.*

Préservation de l'indépendance

- A et B indépendants alors A et B^c indépendants
- A et B indépendants alors A^c et B indépendants
- A et B indépendants alors A^c et B^c indépendants
- A,B,C indépendants alors $A \cap B$ et C sont indépendants
- A,B,C indépendants alors $A \cup B$ et C sont indépendants
- A,B,C,D indépendants alors $A \cap B$ et $C \cup D$ sont indépendants

Exercice

Soient A, B et C trois évènements indépendants tels que :
$\mathbb{P}(A) = 0,5$; $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$ et $\mathbb{P}(A \cap C) = 0,1$.

1. Calculer $\mathbb{P}(B)$
2. Calculer $\mathbb{P}(C)$
3. Calculer $\mathbb{P}(A \cup (B \cap C))$
4. Calculer $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$
5. Calculer $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$